MATEMATİKSEL İSTATİSTİK DERS NOTLARI

Hazırlayan:
Prof. Dr. İsmail ERDEM
Yrd. Doç. Dr. İlknur Özmen
Başkent Üniversitesi
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü

İST 251 MATEMATİKSEL İSTATİSTİK VE OLASILIK I

BÖLÜM I

Permütasyon (Sıradüzen), Kombinasyon ve Uygulama

1.1. **Permütasyon (Sıradüzen):**
İnsanlar, nesnelerin değişik düzenlerde sıralanma sayısının bulunmasına ilişkin sorularla ilgilenmişlerdir. Örneğin; 12 kişi bir sıraya kaç farklı düzende oturabilir, 8 kişi bir sinema gişesi önünde kaç farklı düzende sıralanabilir gibi. Olasılıkların incelenmesinde de buna benzer soruların yanıtlanmasına gerek olacağından, öncelikle permütasyon konusunu inceleyelim.

n tane nesneyi sıralama, belirli bir sırada düzenleme ilgi alanımıza giriyorsa, olası düzenlemelerin tümüne sıradüzen (permütasyon) adı verilir. Örneğin; A, B ve C harfleri ile adlandırılan üç kitabın bir rafa kaç farklı düzende sıralanabileceğini belirlemek isteyelim. Bu soruya cevap iki farklı şekilde verilebilir.

I. *yol;* **Ağaç diyagramından** yararlanmaktır. Ağaç diyagramında değişik düzenlerin sayısı, yani sıra düzenlerin sayısı şu şekilde elde edilir.

	1.gözdeki kitap	2.gözdeki kitap	3.gözdeki kitap	Olası düzenler
O	A	B	C	ABC
		C	B	ACB
	B	A	C	BAC
		C	A	BCA
	C	A	B	CAB
		B	A	CBA

Bu diyagramdan A, B, C ile adlandırılan kitapların altı farklı düzende sıralanabileceği görülmektedir.

II.yol,

Biçimindeki gözelerin doldurulmasına dayanmaktadır.

Birinci göze; A, B ve C kitaplarından biri ile, yani 3 değişik yolla doldurulabilir.

3		

Birinci Gözeye konabilecek kitabın her biri için ikinci göze; geriye kalan iki kitaptan biri ya da öteki ile doldurulabilir.

3	2	

Üçüncü göze de geriye kalan bir kitap ile doldurulabilir.

3	2	1

Böylece üç kitabın değişik düzen sayısı 3.2.1 =6 olarak bulunur.

ÇARPMA İLKESİ: n_1 yolda ortaya çıkan bir olay düşünelim. Bunu izleyen ikinci olay, n_1 yolun her biri için n_2 yolda ortaya çıksın. Bu durumda tüm olayın değişik biçimde ortaya çıkma sayısı $n_1.n_2$ olur.

Bu durumu birbirini izleyen k olay için genelleyecek olursak: i olayı n_i yolda yapılabilsin. k olayın tümü birlikte $n_1.n_2........n_k$ değişik yolda meydana gelebilir.

Örnek: 1, 2, 3, 4, 5 rakamları ile hiçbir rakamı tekrarlamadan üç rakamlı kaç farklı sayı yazılabilir? Doldurulacak 3 göze vardır. İlk göze, beş rakamın herhangi biri (1, 2, 3, 4, 5) ile yani beş farklı şekilde doldurulabilir. İkinci göze, geriye kalan dört rakamın herhangi biri ile yani dört farklı şekilde doldurulabilir. Son göze yani üçüncü göze, geriye kalan üç rakamdan bir ile yani üç farklı şekilde doldurulabilir. Çarpma ilkesine göre, oluşturulabilecek üç basamaklı sayıların toplam sayısı; 5. 4 .3 = 60 olur.

TOPLAMA İLKESİ: Birincisi n_1 farklı şekilde, ikincisi n_2 farklı şekilde yapılabilen iki işlemi göz önüne alalım. İki işlemden ancak birinden biri yapılabilirse, bu işlemlerden bir ya da öteki (n_1 + n_2) yolda yapılabilir. Toplama ilkesi, sonlu sayıda işlemi içine alan durumlar için de genellenebilir.
Örneğin bir öğrencinin sabah dersleri için Üniversiteye ulaşımda kullanacağı seçenekler:
3 farklı servis aracı, iki farklı arkadaşın otomobili, Babasının veya bir komşunun otomobili olsun. Bu öğrenci o sabah Üniversiteye kaç farklı yolla ulaşabilir?
Cevap: 3+2+2=7 olur.

n FAKTORİYEL (n!):

1'den n'ye kadar tüm tamsayıların çarpımına n faktoriyel denir ve n! ile gösterilir.
n! = 1.2......n = n(n-1)......2.1
0! = 1 ve 1! = 1'dir.
n büyüdükçe, n!'li bulmak güçleşir. Bu durumda Stirling formülü kullanılarak n! yaklaşık olarak bulunur.
n büyüdükçe $\longrightarrow$ $n! \cong \sqrt{2\pi n}\,.\,n^n e^{-n}$ ile yaklaşık değeri hesaplanabilir.
Örneğin : n=25 için 25!= $1.551121*10^{25}$ tir ve aynı değeri yaklaşık olarak hesaplayacak olursak; $25! \cong \sqrt{2\pi 25}\,.25^{25}.e^{-25} = 1.5459594*10^{25}$ bulunur ki bu da gerçek değere çok yakındır.

Teorem: n tane birbirinden farklı nesnenin n tanesi sıralandığında elde edilecek değişik düzen sayısı n!'dır. n tane farklı nesnenin sıralanmasından elde edilen düzenlerin sayısı ${}_nP_n = n!$ ile gösterilir. Buna göre,

$${}_nP_n = n! \text{ olur.}$$

Örnek: 7 kişi bir gişe önünde kaç farklı düzende sıralanabilir?

${}_7P_7 = 7! = 7.6 .....1 = 5040 \longrightarrow$ 7 kişinin farklı düzende sıralanma sayısı

Teorem: n tane farklı nesnenin (nesneler sıralamalarda yalnız bir kez kullanılabilecek) k (k ≤ n) tanesi sıralanırsa, elde edilecek farklı düzenlerin sayısı ${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ile gösterilir ve

$${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ ...(n-k+1) \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek: ORHAN sözcüğünün harflerinden iki harfli kaç farklı sözcük yapılabilir?

Beş harften ikisini seçip iki harfli sözcükler oluşturacağız. Sözcüklerde harflerin sırası önemlidir. İki harfli sözcüklerin sayısı, n=5 ve k=2 olmak üzere

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5.4.3!}{3!} = 5.4 = 20 \ \ olur$$

Şimdiye dek birbirinden farklı nesnelerin düzenlerinin sayısı incelendi. Eğer nesnelerin bazıları aynı ise, bu durumda düzenlerin sayısını bulmak için değişik işlem yapmamız gerekecektir. Örneğin; 1, 2, 3, 4 rakamlarını Bir kez kullanılmak koşuluyla 4 rakamlı 24= (4!) sayı elde edebiliriz. 4, 4, 4, 4 gibi her biri aynı rakam olduğunda ise 4 rakamlı sadece bir sayı elde edebiliriz.

Teorem: n_1 tanesi bir türden, n_2 tanesi ikinci bir türden, ...,n_k tanesi k nıncı türden olan $n=(n_1+\ ..+n_k)$ tane nesne olsun. n tane nesnenin tümü sıralanırsa, elde edilecek farklı düzenlerin sayısı

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

oranından bulunur.

Örnek: İSTATİSTİK sözcüğünün harflerini her düzende kullanmak koşulu altında, kaç farklı sözcük elde edebiliriz?

İSTATİSTİK sözcüğünde 5 farklı harf (i, s, t, a, k) vardır. n_1=3(i'lerin sayısı), n_2=2(s'lerin sayısı), n_3=3(t'lerin sayısı), n_4=1(a'ların sayısı) ve n_5=1(k'ların sayısı). O halde elde edilecek farklı sözcük sayısı,

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!} = \frac{10!}{3!2!3!1!1!} = 50400 \ \ \text{olur.}$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 3 + 2 + 3 + 1 + 1 = 10$$

DAİRESEL DÜZEN: n tane farklı nesneyi bir daire çevresinde sıralarsak elde edilecek farklı düzenlerin sayısı (n-1)! bulunur.

Örnek: 7 kişi yuvarlak bir masa çevresinde kaç farklı düzende oturabilir?
(7-1)! =6! = 720

1.2. Kombinasyon (Birleşim):
Permütasyonda sıra önemli iken kombinasyonda sıra önemli değil, seçim önemlidir. Dolayısıyla permütasyon (sıradüzen) sayısı ile kombinasyon (birleşim) sayısı eşit değildir. Örneğin; A, B ve C ile gösterilen üç nesneden iki tanesini, sırayı göz önüne almadan, seçmek istersek AB, AC, BC gibi üç farklı seçim yapılabilir. Burada nesnelerin sırasını dikkate almadığımız için AB ile BA aynı seçimlerdir. Üç nesnenin ikişerli sıralanmasından elde edilecek farklı düzen sayılarını bulmak istersek burada sıralama önemli olduğundan permütasyon yardımıyla,

$${}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6 \text{ olarak bulunur.}$$

Permütasyonlar	Kombinasyonlar
AB, BA	AB
AC, CA	AC
BC, CB	BC

Kombinasyona ilişkin bazı tanımlar:

1- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(k-1)]}{1.2...k}$

2- $\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{0}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{0} = 1$

3- n negatif olmayan bir tamsayı ve k, n'den büyük bir tamsayı ise $\binom{n}{k}$ = 0'dır.

1<n<k olduğu için $\binom{n}{k}$ tanımından kesrin payı sıfır bulunur ve kesrin değeri sıfır olur. Örneğin

$$\binom{2}{3} = \frac{2!}{3!(2-3)!} = \frac{2.(2-1)(2-2)}{3!(-1!)} = 0$$

4- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ dir.

5- $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + ... + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$ dir.

6. $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}\text{dır.}$$

Teorem: Birbirinden farklı n nesnenin k mertebeli (dereceli) kombinasyon sayısı

$${}_nC_k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!.}\frac{1}{k!}=\frac{{}_nP_k}{k!}\text{ olarak bulunur.}$$

Örnek: 4 kız ve 7 erkek öğrenciden arasından 5 kişilik bir kurulda 2 kız ve 3 erkek öğrenci olması istenirse ve kızlar ve erkekler içinden yapılacak seçimler tesadüfi olarak yapılacaksa kaç farklı seçim yapılabilir?

Kurula girecek 2 kız öğrenci için $\binom{4}{2}$ farklı seçim

3 erkek öğrenci için $\binom{7}{3}$ farklı seçim

yapılabilir. Buna göre, 5 kişilik değişik kurul sayısı,

$$\binom{4}{2}\binom{7}{3}=\frac{4!}{2!2!}.\frac{7!}{3!4!}=210\text{ bulunur.}$$

Teorem: n farklı nesneden oluşan bir küme, birincisi n_1, ikincisi n_2,...r'incisi n_r nesne içeren r alt kümeye

$$\binom{n}{n_1,n_2,...n_r}=\frac{n!}{n_1!.n_2!...n_r!}$$

farklı yolla bölünebilir. ($n=n_1+...n_r$)

Tanıt(İspat): İlk alt kümeye giren n_1 nesne $\binom{n}{n_1}$ yolla, ikinci alt kümeye giren n_2 nesne $\binom{n-n_1}{n_2}$ yolla üçüncü alt kümeye giren n_3 nesne $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ yolla, r'inci alt kümeye giren n_r nesne $\binom{n-n_1-n_2-....n_{r-1}}{n_r}$ yolla seçilebilir.

Buna göre $\binom{n}{n_1,n_2,...,n_r}=\binom{n}{n_1}.\binom{n-n_1}{n_2}....\binom{n-n_1-...n_{r-1}}{n_r}$

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1)!(n-n_1-n_2)!}....\frac{(n-n_1-n_2-...n_{r-1})!}{n_r!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!....n_r!}\quad olur$$

Örnek: 8 değişik kitap 3 çocuğa dağıtılacaktır. Birinci çocuğa 2 kitap, ikinci çocuğa 3 kitap ve üçüncü çocuğa 3 kitap verileceğine göre, 8 kitap 3 çocuğa kaç değişik yolla dağıtılabilir?

$n=8, \quad n_1=2, \quad n_2=3, \quad n_3=3 \qquad \binom{8}{2,3,3} = ?$

$\binom{8}{2,3,3} = \dfrac{8!}{2!3!3!} = 560$ değişik yolla dağıtılabilir.

İKİ TERİMLİ (BİNOM) KATSAYILAR!

n artı değerli bir tamsayı iken (x+y) gibi iki terimli bir ifadenin açılımları:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$'tür.

Her açılımda (üs+1) sayıda terim vardır. Örneğin (x+y)4 açılımında terim sayısı 4+1=5'tir. Ancak üs büyüdükçe açılımı bulmak güçleşir. Bu durumda Binom teoreminden yararlanılır.

Teorem: n pozitif değerli bir tamsayı olmak üzere $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$ 'dir. Burada $(x+y)^n$ açılırsa, $x^{n-r}y^r$ teriminin katsayısı, y'leri veren r tane çarpanın seçilebileceği yol sayısı olan $\binom{n}{r}$'dir. $\binom{n}{r}$'ye iki terimli katsayısı denir.

Örnek: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ açılımı, x^3, x^2y, xy^2 ve y^3 terimlerini içerir. Bunların katsayıları 1,3,3,1'dir. xy^2 terimine karşılık gelen katsayı bulunmak istenirse, y^2'leri veren iki çarpanın seçilebileceği yol sayısı olan $\binom{3}{2}=3$ olarak bulunur. [(x.y.y), (y.x.y), (y.y.x)]

x^3 ve y^3'ün katsayıları olan $\binom{3}{0}=1$ ve $\binom{3}{3}=1$ olarak bulunur. $(x.x.x).y^0$'leri veren çarpanın seçilebileceği yol sayısı $\binom{3}{0}=1$,

$(y.y.y).x^0$ leri veren çarpanın seçilebileceği yol sayısı $\binom{3}{3}=1$'dir.

Örnek: $(3 + 2x)^5$ ifadesinin açılımını yazınız.

a=3 b=2x n=5

$$(3+2x)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 3^{5-k}.(2x)^k$$

$$=\binom{5}{0}3^5(2x)^0+\binom{5}{1}3^4(2x)^1+\binom{5}{2}3^3(2x)^2+\binom{5}{3}3^2.(2x)^3+\binom{5}{4}3^1(2x)^4+\binom{5}{5}3^0.(2x)^5$$

$=3^5+(5)(3^4)(2x)+(10)(3^3)(2x)^2+(10)(3^2)(2x)^3+(5)(3)(2x)^4+(2x)^5$

$=32x^5+240x^4+720x^3+1080x^2+810x+243$ bulunur.

İki terimli katsayıların bulunmasında Pascal üçgeninden yararlanılabilir. Pascal üçgeninde, her sıradaki ilk ve son terimler 1 ve öteki terimler bir üst sıradaki ardışık iki katsayının toplanmasıyla elde edilir.

	1
(x+y)0=1	1 1
$(x+y)^1= x+y$	1 2 1
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	1 3 3 1
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	1 4 6 4 1
$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$	

ÇOK TERİMLİ (MULTINOMIAL) KATSAYILAR:

$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_r} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$ oranından yararlanarak $(x_1+x_2+\ldots x_r)^n$ teriminin açılımındaki $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$ teriminin çok terimli katsayısı, $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$

olur.

Örnek: $(x_1+x_2+x_3)^6$'nın açılımındaki $x_1^3x_2x_3^2$ teriminin katsayısı kaçtır?

n=6, $n_1=3$ $n_2=1$ $n_3=2$ olduğuna göre

$\dfrac{6!}{3!\,1!\,!2!} = \dfrac{6.5.4.3!}{3!.1.2} = 60$ bulunur.

Örnek: $(x+y+z)^8$'in açılımındaki $x^2y^3z^3$ teriminin katsayısını bulunuz?

n=8 $n_1=2$ $n_2=3$ $n_3=3$

$\dfrac{8!}{2!.3!.3!} = \dfrac{8.7.6.5.4.3!}{2.6.3!}$ =560 bulunur.

UYGULAMA I
(Permütasyon-Kombinasyon)

1) 15 sorudan oluşan bir sınavda 7 soruyu yanıtlamak zorunda olan bir öğrenci,
a) hiçbir koşul olmadan 7 soruyu kaç değişik şekilde seçer?
b) ilk 3 soru zorunlu ise 7 soruyu kaç değişik yolla seçer?
c) ilk 4 sorunun en az 3'nü yanıtlamak zorunda ise 7 soruyu kaç değişik yolla seçer?

Çözüm:

a) 15 sorudan 7 soruyu $\binom{15}{7}=\frac{15!}{7!.8!}=6435$ yolla seçer.

b) 15 sorudan ilk 3 soru zorunlu ise, seçim yapılabilecek soru sayısı (15-3)=12 olur. 7 soru yanıtlayacak ilk 3 sorudan sonra
7-3=4 soru daha yanıtlanması gerekir. Geriye kalan 12 sorudan 4 soruyu $\binom{12}{4}=\frac{12!}{4!8!}=495$ değişik yolla seçer.

c) $\binom{4}{3}*\binom{11}{4}+\binom{4}{4}*\binom{11}{3}=\frac{4!}{3!1!}*\frac{11!}{4!7!}+\frac{4!}{4!0!}*\frac{11!}{3!8!}=1320+165=1485$ değişik yolla seçer.

2) İki katlı bir otobüsle 20 yolcu, 12'si üst katta ve 8'i alt katta olmak üzere seyahat edeceklerdir. Yolculardan 4'ü üst katta, 5'i alt katta seyahat etmek istememektedir. Yolcular, sıralamaları göz önüne almaksızın kaç değişik şekilde oturtulabilir?

Çözüm:

20 yolcu $\rightarrow$ 12 üst ve 8 Alt

Yolcular 4'ü alt katta, 5'i üst katta gideceğine göre 9 yolcu yerleştirilir. Geriye 20-9=11 kalır. Otobüsün üst katında 12-5=7 boş yer, alt katında 8-4=4 boş yer kalır. Bu durumda 11 yolcunun 7si üst kattaki ve 4ü alt kattaki boş yerlere

$\binom{11}{7,4}=\frac{11!}{7!.4!}=330$ farklı biçimde yerleştirilir, veya $\binom{11}{7}\binom{4}{4}=\frac{11!}{7!.4!}$ aynı sonuç elde edilir.

3) OTURMAK sözcüğünün harflerinden, 2'si sessiz ve 3'ü sesli olan 5 harfli kaç farklı sözcük oluşturulabilir?

Çözüm: OTURMAK sözcüğünde 3 sesli (O, U, A) ve 4 sessiz (T, R, M, K) harf vardır. Bunlar arasından 2'si sessiz, 3'ü sesli harf $\binom{4}{2}\binom{3}{3}$ yolla seçilir. Her seçim için sözcük sayısı 5! olduğuna göre, istenilen biçimdeki farklı sözcük sayısı $\binom{4}{2}\binom{3}{3}5!=720$ olur.

4) 12 sandalyeye, 2 kişi kaç farklı yolla oturtulabilir?

Çözüm: 12 yerden 2'sini seçeceğiz. Ayrıca bu 2 kişinin kendi aralarında bir sıradüzeni (permütasyonu) vardır. Buna göre farklı düzenlerin sayısı

$$\binom{12}{2}2! = \frac{12!}{2!.10!}.2! = 132$$ olarak bulunur.

5) 9 farklı oyuncağı 4 çocuk arasında, 1.'ye 3, kalan çocuklara 2'şer oyuncak verecek şekilde kaç türlü dağıtabiliriz?

Çözüm: $\binom{9}{3,2,2,2} = \frac{9!}{3!2!2!2!}$ =7560 farklı şekilde dağıtabiliriz.

6) 24 üyeli bir kulüp üyelerin arasından bir başkan, bir başkan yardımcısı, bir sayman ve bir de yazman seçilecektir. Seçimler tesadüfi olarak yapılacak ve ilk seçilen başkan, ikincisi başkan yardımcısı, üçüncüsü sayman ve dördüncüsü de yazman olacak ise, bu dört pozisyon kaç farklı şekilde doldurulabilir?

Çözüm : 24 üyeden bir defada 4'nün alınmasının permütasyon sayısı,

$$_{24}P_4 = \frac{24!}{(24-4)!} = \frac{24!}{20!} = \frac{24.23.22.21.20!}{20!} = 255{,}024$$

7) Bir para 6 kez atıldığında 2 yazı (Y) ve 4 tura (T) kaç değişik biçimde gelebilir?

Çözüm:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!.4!} = 15 \Longrightarrow$$ 2 kez Y gelmesi

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{2!.4!} = 15 \Longrightarrow$$ 4 kez T gelmesi