Bölüm 17

METRİK UZAYLAR

Klasik Analiz, ilkel işlemler diye adlandırdığımız *dört işlem* (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) ile bunlara eklenen ve çoğu kez beşinci işlem diye adlandırılan *"limit"* işlemlerine dayalı olarak kurulmuş ve o kadar çok dallara ayrılmıştır ki, ayrı dalların uzmanları birbirlerini anlayamaz duruma gelmişlerdir. *Seriler, Analitik Fonksiyonlar, Diferensiyel Denklemler, Fourier Analizi,...,v.b.* gibi her biri bir ömür boyunca çalışılabilecek olan bu dalların başlıca ilkelerini ortak bir biçimde ortaya koymanın gerekliliği geçen yüzyılın matematikçileri tarafından duyulmaya başlandı. *Riemann, Weiserstrass, Cantor, Lebesgue, Hilbert, Riesz,...,v.b.* gibi matematiğin büyük isimleri bu yöndeki dev adımı atabildiler ve Klasik Analizin temel ilkelerini *Topoloji, Soyut Cebir, Ölçüm ve İntegral Kuramı* üzerine dayıyarak, bugün Çağdaş Analiz ediğimiz mükemmel kuramı kurabildiler. *Çağdaş Analiz*, gerçel ve karmaşık sayıları model alan soyut matematiksel yapılar üzerinde, klasik Analizin temel teoremlerini kurmaktadır.

Klasik Analizden Çağdaş Analize geçişte Metrik Uzaylar önemli bir yer tutar. Topolojinin başlıca kavramlarının pek çoğu metrik uzaylardan aktarılmıştr. Üstelik metrik uzaylar hala önemini korumaktadır. Bu nedenle, bu bölümde *metrik uzayların* temel özeliklerini inceleyeceğiz.

Metrik uzay kavramını vermeden önce, gerçel ya da karmaşık bir vektör uzayı üzerinde tanımlanan *norm* kavramını vereceğiz.

17.1 NORMLU UZAYLAR

Tanım 17.1.1. $\mathbb{K}$, gerçel ya da karmaşık sayılar cismini göstersin ve X kümesi $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip bir

$$p : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna, X vektör uzayı üzerinde bir yarı-norm denilir:

Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

[N1] $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (alt-toplamsallık)

[N2] $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ (pozitif-homojenlik)

Eğer bu ikisine ek olarak

[N3] $x \neq 0 \Rightarrow p(x) \neq 0$

özelliği de sağlanıyorsa, p fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir *normdur*, denilir.

Önerme 17.1.1. *Eğer p fonksiyonu X vektör uzayı üzerinde bir yarı-norm ise aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a) $p(0) = 0$

(b) $|\, p(x) - p(y)\, | \leq p(x-y)$

(c) $p(x) \geq 0$

(d) $\{x : p(x) = 0\}$ kümesi X uzayının bir alt vektör uzayıdır

(e) $B = \{x : p(x) < 1\}$ kümesi dışbükeydir.

İSPAT:

(a): $[N2]$ de $\alpha = 0$ almak yeter.

(b): $[N1]$ den $p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y)$ yazabiliriz. Bu ise,

$$p(x) - p(y) \leq p(x-y)$$

demektir. Aynı işi, x ile y nin yerlerini değiştirerek yaparsak

$$p(y) - p(x) \leq p(y - x)$$

çıkar. $[N2]$ uyarınca $p(x - y) = p(y - x)$ olduğundan, yukarıdaki iki eşitsizlikten

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$$

yazılabilir.

(c): $y = 0$ alınırsa (b) den çıkar.

(d): $p(x) = p(y) = 0$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ise, (c) den

$$0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0$$

olur, ki bu $\{x : p(x) = 0\}$ kümesinin bir alt-vektör uzayı olması demektir.

(e): $x, y \in B$ ve $0 < \alpha < 1$ ise

$$p(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha) p(y) < 1$$

çıkar. Dolayısıyla, B kümesi dışbükey olur.

Tanım 17.1.2. Üzerinde bir norm tanımlanmış her hangi bir vektör uzayına *normlanmış* bir uzay, denilir.

Bir vektör uzayı üzerindeki bir normu, çoğu kez, $\| \ \|$ simgesiyle göstereceğiz. Buna göre norm fonksiyonu

$$x \to \|x\|$$

olacaktır. Bu norm ile normlanmış bir X vektör uzayını $(X, \|\|)$ simgesiyle belirteceğiz.

Aşağıdaki örnekler, n-boyulu ($n \geq 1$) gerçel $\mathbb{R}^n$ ya da karmaşık $\mathbb{C}^n$ Öklit uzayında tanımlanan bazı normlardır.

Örnek 17.1.1. Her $x \in \mathbb{R}$ sayısının salt değerini $|x|$ ile gösterelim. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır, ve

$$x \to |x| \tag{17.1}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ vektör uzayı üzerinde bir normdur.

Örnek 17.1.2. Her $z \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısının salt değerini $|z|$ ile gösterelim. $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır ve

$$z \to |z| \tag{17.2}$$

fonksiyonu $\mathbb{C}$ vektör uzayı üzerinde bir normdur.

Örnek 17.1.3. Her $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$x \to \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{17.3}$$

diye tanımlanan dönüşüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir normdur. Gerçekten bu dönüşümün [Nl] , [N2] ve [N3] aksiyomlarını sağladığı kolayca görülür.

Örnek 17.1.4. Her $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ için

$$z \to \|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i| \tag{17.4}$$

diye tanımlanan dönüşüm $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir normdur. Bunun ispatı da yukarıdakine benzer.

Örnek 17.1.5. Her $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$x \to \|x\|_{max} = \max\left\{|x_i| \ : \ (1 \leq i \leq n)\right\} \tag{17.5}$$

diye tanımlanan dönüşüm $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir normdur. (Neden?).

Örnek 17.1.6. Her $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ için

$$z \to \|z\|_{max} = \max\left\{|z_i| \ : \ (1 \leq i \leq n)\right\} \tag{17.6}$$

diye tanımlanan dönüşüm $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir normdur. (Neden?).

n-boyutlu ($n \geq 1$) gerçel $\mathbb{R}^n$ ve karmaşık $\mathbb{C}^n$ Öklit uzayları üzerinde tanımlanan önemli normlardan birisi şudur:

Tanım 17.1.3. $\mathbb{R}^n$ ya da $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ uzayına ait bir $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektörünün *Öklit uzunluğu* aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır:

$$u \to \|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.7}$$

Buna *Öklid normu* denir. Gerçekten $u \to \|u\|_2$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ vektör uzayları üzerinde birer norm olduğunu ispatlamak için, öncelikle, aşağıdaki iki önemli eşitsizliği ortaya koyacağız.

Önerme 17.1.2 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)**.** *$\mathbb{R}^n$ yada $\mathbb{C}^n$ Öklit uzayına ait her $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve her $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektörü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \tag{17.8}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.9}$$

İSPAT:

$a = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|$ diyelim ve λ değişkenine göre ikinci dereceden olan

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \|x\|_2^2 \lambda^2 + 2a\lambda + \|y\|_2^2 \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda |x_i| + |y_i|)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

polinomunu düşünelim. Her λ için $Q(\lambda)$ polinomun daima pozitif değerler alabilmesi için

$$\Delta = (2a)^2 - 4 \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$$

diskriminantı pozitif olmamalıdır. Bu ise

$$a^2 \leq \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$$

eşitsizliğini verir, ki bu sonuncusu aradığımız eşitsizliğe denktir.

Önerme 17.1.3 (Minkowski Eşitsizliği)**.** *$\mathbb{R}^n$ ya da $\mathbb{C}^n (n \geq 1)$ Öklit uzayına ait her $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve her $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektörü için, Öklit uzunluğu, üçgen eşitsizliğini sağlar:*

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \tag{17.10}$$

İSPAT:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \left(|x_i| + |y_i|\right), \text{(üçgen eşitsizliği)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \cdot |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \cdot |y_i| \\
&\leq \|x + y\|_2 \cdot \|x\|_2 + \|x + y\|_2 \cdot \|y\|_2 \,, \\
&\quad \text{(Cauchy-Schwarz eşitsizliği)} \\
&= \|x + y\|_2 \cdot \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)
\end{aligned}$$

çıkar. Şimdi, eğer $\|x + y\|_2 = 0$ ise aradığımız eşitsizlik zaten vardır. Eğer $\|x + y\|_2 \neq 0$ ise, vardığımız son eşitsizliğin iki yanını $\|x + y\|_2$ ile bölersek, istenen şey çıkar.

Örnek 17.1.7. $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n (n \geq 1)$ vektör uzayları, Öklid uzunluğuna göre, normlanmış birer uzaydır.

İSPAT: Bu uzaylardan $\mathbb{R}$'ye tanımlanan

$$x \to \|x\|_2$$

fonksiyonunun norm aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

[N1] Minkowski eşitsizliğinden hemen görülür.

[N2]

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\alpha| \cdot \|x\|_2
\end{aligned}$$

[N3] Eğer $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ ise x_i bileşenlerinden enaz birisi sıfırdan farklıdır. Bu durumda $\|x\|_2 \neq 0$ olacağı apaçıktır.

Şimdi yukarıdaki örneklerde $n \to \infty$ iken oluşan durumu inceleyelim.

Tanım 17.1.4. Terimleri gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin salt değerlerinin toplamı sonlu olan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ dizilerinin oluşturduğu kümeye ℓ_1 uzayı denilir. Bu uzay (17.3) normunun sonsuz boyuta genelleşmesidir.

$$\ell_1 = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad : \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\} \tag{17.11}$$

Örnek 17.1.8. ℓ_1 kümesinin $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir doğrusal uzay (vektör uzayı) olduğunu görmek kolaydır. Bu uzay üzerinde

$$x \to \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \tag{17.12}$$

diye tanımlanan dönüşüm bir normdur. (Norm aksiyomlarını sağlayınız.)

Tanım 17.1.5. Terimleri gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin *en küçük üst sınırı (sup) sonlu* olan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ dizilerinin oluşturduğu kümeye ℓ_∞ uzayı denilir. Bu uzay (17.5) normunun sonsuz boyuta genelleşmesidir.

$$\ell_\infty = \big\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad : \quad \sup\{|x_n|, \quad n \in \mathbb{N}\} < \infty \big\} \tag{17.13}$$

Örnek 17.1.9. ℓ_∞ kümesinin $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir doğrusal uzay (vektör uzayı) olduğunu görmek kolaydır. Bu uzay üzerinde

$$x \to \|x\|_\infty = \sup\left\{|x_n| \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \tag{17.14}$$

diye tanımlanan dönüşüm bir normdur. (Norm aksiyomlarını sağlayınız.)

Tanım 17.1.6. Terimleri gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan ve terimlerinin salt değerlerinin karelerinin toplamı sonlu olan bütün dizilerin oluşturduğu uzaya ℓ_2 -uzayı denilir. Bu uzay (17.7) Öklit normunun sonsuz boyuta genellemesidir.

$$\ell_2 = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \tag{17.15}$$

ℓ_2 kümesinin $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğu kolayca görülebilir. Bu uzay, analizde önemli rol oynayan bir *Hilbert uzayıdır.* ℓ_2 uzayında

$$x \to \|x\|_2 \tag{17.16}$$

fonksiyonunun bir norm olduğunu göstermek için, öncelikle, *Cauchy-Schwarz ve Minkowski eşitsizliklerinin* $(\ell_2, \|.\|)$ uzayında da geçerli olduğunu göstermeliyiz.

Önerme 17.1.4. Cauchy-Schwarz eşitsizliği $(\ell_2, \|.\|)$ *uzayında da geçerlidir.*

İSPAT: $n \to \infty$ iken (17.1.4) bağıntısı geçerlidir. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ gerçel ya da karmaşık terimli iki dizi ise

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{17.17}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.18}$$

yazabiliriz. Çünkü, sağ yandaki serilerden birisi ıraksıyorsa sağ yan sonsuz olacağından eşitsizlik doğru olur. Eğer sağ yandaki serilerin her ikisi de yakınsaksa, sağ yan sonludur ve kısmi toplamlar dizisi, her doğal n sayısı için (17.9) eşitsizliğini sağlar. Yakınsak serinin toplamı tanımına göre, $n \to \infty$ iken eşitsizlik bozulmayacaktır. Böyle oluşu bize (17.18) eşitsizliğini verir.

Önerme 17.1.5. Minkowski eşitsizliği $(\ell_2, \|.\|)$ *uzayında da geçerlidir.*

İSPAT: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ gerçel ya da karmaşık terimli her hangi iki sonsuz dizi ise aşağıdaki üçgen eşitsizliği sağlanır:

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \tag{17.19}$$

İSPAT:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| + \|y\| \tag{17.20}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.21}$$

Çünkü (17.10) eşitsizliğinde $n \to \infty$ yapmak yetecektir. Bu iş, daha önce Cauchy-Schwarz eşitsizliğini genelleştirirken yaptığımıza benzer düşünüşle yapılabilir.

Önerme 17.1.6. $(\ell_2, \|.\|)$ *uzayı normlanmış bir uzaydır.*

İSPAT:
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$ için

$$x \to \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.22}$$

diye tanımlanan dönüşümün norm aksiyomlarını sağladığını göstereceğiz. [N1] aksiyomunun sağlandığı Minkowski eşitsizliğinden çıkar. Öteki iki aksiyomun sağlandığı apaçıktır.

Örnek 17.1.10. Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde Riemann integrali varolan karmaşık değerli bütün fonksiyonların oluşturduğu kümeye $\mathfrak{R}[a, b]$ diyelim. Bu küme $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde

$$f \to \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{17.23}$$

dönüşümü bir yarı norm olur, ama bir norm değildir. Buna $\mathfrak{L}^1$- yarı normu diyeceğiz.

Gerçekten [N1] ve [N2] aksiyomları integral özelliklerinden hemen görülür. Öte yandan bu uzaya ait bir f fonksiyonu için $\|f\|_1 = 0$ olması, yani

$$\int_a^b \|f(x)\| dx = 0$$

olması $f = 0$ olmasını gerektirmez. (Neden?) Bu dönüşümü norm yapabilmek için nasıl bir yol izlenebilir?

Örnek 17.1.11. Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve sürekli bütün fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $C[a, b]$ ile göstereceğiz. Bu küme, $\mathscr{R}[a, b]$ vektör uzayının bir alt-vektör uzayıdır. Yukarıdaki $\mathfrak{L}^1$- yarı-normu $C[a, b]$ üzerinde bir norm olur. Neden?

Örnek 17.1.12. Her hangi bir X kümesi üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve sınırlı bütün fonksiyonların oluşturduğu $\mathfrak{B}(X)$ kümesi, karmaşık sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde

$$f \to \|f\|_\infty = \sup \{|f(x)|, x \in X\} \tag{17.24}$$

dönüşümü bir normdur. Buna düzgün yakınsama normu denilir. Bunun bir norm olduğunu gösteriniz.

Örnek 17.1.13. Lebesgue integraline göre, $[0, 1]$ aralığı üzerinde salt değerlerinin kareleri integrallenebilen karmaşık değerli bütün fonksiyonların uzayını $\mathfrak{L}^2[0, 1]$ ile gösterelim. Bu uzay üzerinde

$$\varphi \to \|\varphi\|_2 = \left(\int_0^1 \|\varphi(x)\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.25}$$

diye tanımlanan dönüşümün bir yarı-norm olduğu integral kuramından bilinir. Ama, integrali sıfıra eşit pozitif değerli bir fonksiyon için ancak hemen hemen her yerde sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla yukarıdaki dönüşüm bir norm değildir.

Bunu norm yapabilmek için $L^2[0, 1]$ uzayını hemen hemen her yerde birbirine eşit olan fonksiyonların oluşturduğu denklik sınıflarına ayıralım ve bu denklik sınıflarının oluşturduğu uzayı $\mathfrak{L}^2[0, 1]$ ile gösterelim. Bu uzay üzerinde (1.18) dönüşümünün bir norm olduğu gösterilebilir.

17.1.1 Problemler

1. Karmaşık sayılar kümesi üzerinde, her sayıyı o sayının salt değerine götüren dönüşümün bir norm olduğunu gösteriniz.

2. Bu bölümde ayrıntılı ispatları verilmeden geçilen örnekleri ayrıntılarına inerek ispatlayınız.

17.2 METRİK

METRİK UZAY KAVRAMI

Normlanmış bir uzay, herşeyden önce bir vektör uzayıdır, yani $(X, \|\|)$ normlanmış bir uzay ise, X kümesi üzerinde bir vektör uzayı yapısı vardır. Oysa, bu kesimde tanımlayacağımız metrik uzay kavramı için X kümesinin, aşağıda söyleyeceğimiz metrik aksiyomlarından başka bir özelliğe ya da yapıya sahip olması gerekmez.

Bir metrik uzay, öğeleri arasındaki yakınlık belirlenmiş bir kümedir. Başka bir deyişle, üzerinde bir uzaklık fonksiyonu tanımlanmış bir kümedir. Gerçekten, adına metrik diyeceğimiz bu kavram, herkesin sezgisel olarak bildiği uzaklık kavramının genellemesinden başka birşey değildir.

Tanım 17.2.1. Bir X kümesi ile bir $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Aşağıdaki aksiyomları sıralıyalım:

Her $x, y, z \in X$ için

[M1] $\rho(x, y) \geq 0$

[M2] $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

[M3] $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simetrik)

[M4] $x = y \Rightarrow \rho(x, y) = 0 \quad (\text{yani}\, \rho(x, x) = 0)$

[M5] $x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) \neq 0$

Bu aksiyomlardan

[$M1$] ve [M2] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *yarı metriksi (quasi-semi-metric)*,

[$M1$], [M2] ve [M3] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *yarı metrik (semi-metric)*,

[$M1$], [M2] ve [M4] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *sözde metriksi (quasi-pseudometric)*,

[$M1$], [M2] , [M3] ve [M4] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *sözde metrik (pseudometric)*,

[$M1$], [M2] , [M3] , [M4] ve [M5] özelikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *metrik (metric),*

denilir.

Hemen belirtelim ki bu aksiyomlar birbirlerinden bağımsız değildir. Örneğin [M4],[M2] ve [M3] aksiyomları sırasıyla kullanlırsa

$$0 = \rho(x,x) \leq \rho(x,y) + \rho(y,x) = 2\rho(x,y)$$

çıkar, ki bu, [M1] aksiyomunu verir.

Üzerinde bir metrik tanımlanmış bir kümeye bir *metrik uzay* diyeceğiz. Eğer ρ fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir metrik ise, bu metrik uzayı (X,ρ) ile göstereceğiz.

Yarı-metrik uzay ve *metrikimsi uzay* kavramları da benzer olarak tanımlanır.

(X,ρ) bir metrik uzay ve $x, y \in X$ ise, negatif olmayan $\rho(x,y)$ gerçel sayısına x ile y öğeleri arasındaki *uzaklık* diyeceğiz.

Örnek 17.2.1. Boş olmayan her hangi bir X kümesi verilsin. $X \times X$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

dönüşümü bir metriktir.

Örnek 17.2.2. $|\quad|$ simgesi gerçel eksende salt değer fonksiyonunu göstermek üzere, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$\mu(x,y) = |x - y|, \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{17.26}$$

fonksiyonu bir metriktir. Adına, gerçel eksen üzerindeki *salt değer metriği* ya da kısaca *salt metrik*, diyeceğimiz bu metrik, iki gerçel sayı arasındaki uzaklığı vermektedir. μ nun metrik aksiyomlarını sağladığı kolayca görülür.

Örnek 17.2.3. $|\quad|$ simgesi karmaşık düzlemde salt değer fonksiyonunu göstermek üzere, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$\kappa(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \tag{17.27}$$

fonksiyonu bir metriktir. Adına, karmaşık düzlem üzerindeki *salt değer metriği* ya da, kısaca *salt metrik* diyeceğimiz bu metrik, iki karmaşık sayı arasındaki uzaklığı vermektedir. κ nın metrik aksiyomlarını sağladığı kolayca görülür.

Önerme 17.2.1. *$x = (x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}^n)$ $(n \geq 1)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan*

$$\mathfrak{p} : (x, y) \to \mathfrak{p}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{17.28}$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir.

İSPAT: [M1] ile [M2] aksiyomlarının sağlandığı apaçıktır. [M3] aksiyomu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| &= \sum_{i=1}^{n} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden çıkar. Son olarak, [M4] ve [M5] aksiyomları

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 &\Leftrightarrow x_i = y_i \quad (1 \leq i \leq n) \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

bağıntısından çıkar.

Önerme 17.2.2. *$x = (x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}^n)$ $(n \geq 1)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan*

$$\mathfrak{m} : (x, y) \to \mathfrak{m}(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \tag{17.29}$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir.

İSPAT: [M1] ile [M2] aksiyomlarının sağlandığı apaçıktır. [M3] aksiyomu

$$\begin{aligned} \max|x_i - y_i| &\leq \max\{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\} \quad (1 \leq i \leq n) \\ &\leq max\,|x_i - z_i| + \max|z_i - y_i| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden çıkar. Son olarak, [M4] ve [M5] aksiyomları

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \max|x_i - y_i| = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \\ &\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

bağıntısından çıkar.

Önerme 17.2.3. $\mathbb{R}^n$ *ya da* $\mathbb{C}^n (n \geq 1)$ *vektör uzayları üzerinde*

$$\mathfrak{s}_n(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{17.30}$$

diye tanımlanan dönüşüm bir metriktir. Buna Öklit metriği *diyeceğiz.*

İSPAT: [M1], [M2], [M4] ve [M5] aksiyomlarının sağlandığı apaçıktır. [M3] aksiyomunun sağlandığını görmek için, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yerine

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$$

koyarak *Minkowski* eşitsizliğini uygulamak yetecektir.

$n = 1$ için $\mathfrak{s}_n$ metriğinin μ salt metriğine indirgendiği açıktır.

Önerme 17.2.4. (X, ρ) *bir metrikimsi uzay ise, her* $x, y, z \in X$ *için*

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y) \tag{17.31}$$

olur.

İSPAT: [M2] ve [M3] den

$$\rho(x,z) \leq \rho(y,z) + \rho(x,y)$$

ve

$$\rho(y,z) \leq \rho(y,x) + \rho(x,z) = \rho(x,y) + \rho(x,z)$$

yazılabilir. Buradan

$$-\rho(x,y) \leq \rho(x,z) - \rho(y,z) \leq \rho(x,y)$$

çıkar. Bu, isteneni verir.

Önerme 17.2.5. (X, ρ) *bir metrikimsi uzay ise, her* $x, y \in X$ *için*

$$\mathfrak{q} : (x,y) \to \mathfrak{q}(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\} \tag{17.32}$$

diye tanımlanan dönüşüm de X *üzerinde bir* metrikimsi *olur.*

İSPAT: [M1], [M2] ve [M4] aksiyomlarının sağlandığı apaçıktır. [M3] aksiyomunun sağlandığı ise

$$\min\{1,\rho(x,y)\} \leq \min\{1,\rho(x,z)+\rho(z,y)\}$$

$$\leq \min\{1,\rho(x,z)\}+\min\{1,\rho(z,y)\}$$

eşitsizliğinden çıkar. Şimdi bu eşitsizliğin varlığını gösterelim. İki hal vardır. Eğer $\rho(x,z)+\rho(z,y) \geq 1$ ise sol yan 1'den büyük olmayacağına göre, eşitsizlik vardır. Eğer $\rho(x,z)+\rho(z,y) < 1$ ise, istenen şey $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ den çıkar.

Demek ki $\mathfrak{q}$ dönüşümü X üzerinde bir metrikimsidir.

Önerme 17.2.6. *Metrikimsilerden oluşan her hangi bir ailenin toplamı da bir metrikimsidir. Özel olarak, sonlu tane metriğin toplamı da bir metriktir.*

İSPAT: X üzerinde tanımlı bir $\{\eta_i : i \in I\}$ metrikimsiler ailesi verilsin. Bu durumda $\eta = \sum_{i\in I} \eta_i$ toplamının da X üzerinde bir metrikimsi olduğunu göstereceğiz. Gerçekten, her $x, y \in X$ için

$$(x,y) \to \eta(x,y) = \sum_{i\in I} \eta_i(x,y) \tag{17.33}$$

diye tanımlanan fonksiyonun [M1]-[M4] aksiyomlarını sağlayacağını görmek için, her $i \in I$ için η_i nin bu aksiyomları sağladığını düşünmek yetecektir.

Özel olarak I indis kümesi sonlu ve η_i ler birer metrik ise toplamlarının sonlu kalacağı ve [M5] aksiyomunun da sağlanacağı apaçıktır.

Önerme 17.2.7. *Metrikimsilerden oluşan her hangi bir ailenin* en küçük üst sınırı (sup) *da bir metrikimsidir. Özel olarak, sonlu tane metriğin* maksimumu *da bir metriktir.*

İSPAT: X üzerinde tanımlı bir $\{\eta_i : i \in I\}$ *metrikimsiler* ailesi verilsin. Bu durumda

$$\chi = \sup\{\eta_i : i \in I\}$$

dönüşümünün de X üzerinde bir metrikimsi olduğunu göstereceğiz. χ nin tanımı uyarınca, her $x, y \in X$ için

$$\chi : (x,y) \to \chi(x,y) = \sup\{\eta_i(x,y) : i \in I\} \tag{17.34}$$

olur. χ nin dönüşümünün [M1]-[M4] aksiyomlarını sağlayacağını görmek için, yine her $i \in I$ için η_i nin bu aksiyomları sağladığını düşünmek yetecektir.

Özel olarak, I sonlu ve η_i ler birer metrik ise, bunların en küçük üst sınırı

$$(x,y) \to \chi(x,y) = \max\{\eta_i(x,y) : i \in I,\ I \text{ sonlu}\} \tag{17.35}$$

maksimumuna eşittir. Çünkü sonlu sayıda $\eta_i(x,y)$ gerçel sayı kümesinin sup değeri max değerine eşittir. Dolayısıyla, χ nin [M5] aksiyomunu sağlayacağı hemen görülür.

Önerme 17.2.8. *Her hangi bir X kümesi ile her hangi bir (E,η) metrikimsi uzayı verilsin ve bir $f : X \to E$ fonksiyonu tanımlanmış olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ için*

$$\vartheta : (x,y) \to \vartheta(x,y) = \eta(f(x), f(y)) \tag{17.36}$$

diye tanımlanan ϑ dönüşümü X üzerinde bir metrikimsi olur.

İSPAT: Bunun [M1]-[M4] aksiyomlarını sağlayacağı kolayca görülebilir. Ancak η bir metrik olsa bile, ϑ bir metrik olmayabilir. Bunu aşağıdaki örnekten görebiliriz.

Örnek 17.2.4. Bir X kümesi ile her hangi bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$$\vartheta : (x,y) \to \vartheta(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

dönüşümü X üzerinde bir *metrikimsidir*, ama bir metrik olmayabilir. Gerçekten f bire-bir değilse ϑ nın [M5] aksiyomunu sağlamayacağı apaçıktır.

Şimdi de, bu dönüşümün metrik olduğu duruma bir örnek verelim.

Örnek 17.2.5.

$$\nu(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| \tag{17.37}$$

diye tanımlanan ν fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir.

Gerçekten ν nün metrikimsi olduğu yukarıdaki örnekten bellidir.

$$x \to \frac{x}{(1+|x|)}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ den $(-1,+1)$ üzerine sürekli ve bire-bir olduğunu biliyoruz. Öyleyse [M5] aksiyomu da sağlanacaktır.

Önerme 17.2.9. $(X, \|\|)$ *normlanmış bir uzay ise her* $x, y \in X$ *için*

$$\rho : (x, y) \to \rho(x, y) = \|x - y\| \tag{17.38}$$

diye tanımlanan ρ *dönüşümü* X *kümesi üzerinde bir metrik olur.*

İSPAT: Norm fonksiyonu negatif değer almadığından, (17.38) ile tanımlanan ρ dönüşümü [M1] aksiyomunu sağlar. [M2] aksiyomu, α yerine -1 konulursa [N2] den çıkar. [M3] aksiyomu

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|x - z + z - y\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x, z) + d(z, y)\end{aligned}$$

den görülür. [M4] ve [M5] aksiyomları ise

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

den çıkar.

Uyarı 17.2.1. Yukarıda tanımlanmış olan $\mathfrak{s}, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ ve $\mathfrak{s}_n$ metriklerinin ilgili Öklid normlarından elde edilebildiğini görünüz.

Örnek 17.2.6. $C[a, b]$ kümesine ait her f, g için

$$(f, g) \to \rho(f, g) = \|f - g\|_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \tag{17.39}$$

diye tanımlanan ρ dönüşümü bir metriktir.

Örnek 17.2.7. (17.24) ile tanımlanan $\mathfrak{B}(X)$ kümesine ait her f, g için

$$(f, g) \to \rho(f, g) = \|f - g\|_\infty \tag{17.40}$$

$$= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \tag{17.41}$$

diye tanımlanan ρ dönüşümü bir metriktir. Neden?

Önerme 17.2.10. *Metrikimsi uzaylardan oluşan bir* $\{(X_n, \eta_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *ailesi verilsin.* $X = \Pi_{n \in \mathbb{N}} X_n$ *kartezyen çarpımını tanımlayalım. Her* n *için* $x_n, y_n \in X_n$ *olmak üzere, her* $x = (x_n), y = (y_n) \in X$

$$\rho : (x, y) \to \rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \eta_n(x_n, y_n) \tag{17.42}$$

dönüşümü X *üzerinde bir* metrikimsidir.

Bunun ispatı kolayca yapabilecektir.

17.2.1 Problemler

1. Bu kesimde ispatı yapılmayan örnekleri ispatlayınız.

2. $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ öğeleri $\mathbb{R}^2$ kümesinden alınmak üzere, aşağıdakilerden hangileri $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metrik değildir?

$$\rho(x,y) = min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$
$$\delta(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$
$$\psi(x,y) = |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$$

3. Sonlu sayıda (X_i, η_i), $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, metrik uzayları veriliyor.

$$X = \Pi_{i=1}^n X_i$$

olsun ve $x, y \in X$ ise $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere,

$$\alpha(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n [\eta_i(x_i, y_i)]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\beta(x,y) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x_i, y_i)$$
$$\gamma(x,y) = \max\{\eta_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

fonksiyonları tanımlanıyor. Bunlar X üzerinde birer metrik midir?

4. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

fonksiyonunun bir metrik olduğunu gösteriniz. Buna, karmaşık sayılar üzerindeki *salt değer metriği* diyeceğiz.

5. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\delta(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)}$$

diye tanımlanan δ fonksiyonunun da X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

6. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. $X \times X$ den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri X üzerinde bir metriktir?

$$\begin{aligned} \delta(x,y) &= k\rho(x,y), \quad (k \in \mathbb{R}^+) \\ \gamma(x,y) &= k\rho(x,y), \quad (k \in \mathbb{R}) \\ \mu(x,y) &= [\rho(x,y)]^n, \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \nu(x,y) &= [\rho(x,y)]^r, \quad (0 < r < 1) \end{aligned}$$

7. X kümesine ait sabit bir a noktası seçelim. Her $f, g \in \mathbb{C}^X$ için

$$\rho : (f,g) \to \rho(f,g) = |f(a) - g(a)|$$

diye tanımlanan ρ dönüşümü $\mathbb{C}^x$ üzerinde bir metrikimsidir. Neden?

8. Bütün karmaşık dizilerin oluşturduğu kümeye $\mathfrak{C}$ diyelim; yani

$$\mathfrak{C} = \{x | x = (x_n), x_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Gösteriniz ki

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \tag{17.43}$$

diye tanımlanan ρ fonksiyonu $\mathfrak{C}$ kümesi üzerinde bir metriktir.

9. Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı değişimli bütün fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $\mathfrak{B}[a, b]$ ile göstereceğiz. Bunun bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Her f fonksiyonunun tam değişimini $\delta(f)$ ile temsil edersek, $f \to \delta(f)$ dönüşümünün bu uzay üzerinde bir yarı norm olduğu, ama bir norm olmadığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla,

$$(f,g) \to \rho(f,g) = \delta(f - g)$$

dönüşümü bu uzay üzerinde bir metrikimsi olur. Gösteriniz.

17.3 METREL TOPOLOJİ

Uygulamada karşımıza çıkan topolojik uzayların büyük bir bölümü aynı zamanda bir metrik uzaydır. Daha doğru bir deyişle, her metrik uzay bir ve yalnız bir topolojik uzay belirler. Buna söz konusu metriğin belirlediği *metrel topoloji* diyeceğiz. Bu kesimde bunun nasıl olduğunu göreceğiz. Ama hemen belirtelim ki, bu özeliğin karşıtı genel olarak doğru değildir; yani her topolojik uzay bir metrik uzay belirlemek zorunda değildir.

Tanım 17.3.1. (X, ρ) bir metrik uzay olsun ve bir $a \in X$ öğesi ile bir $r > 0$ sayısı verilsin.

$$B_\rho(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$$

alt-kümesine a merkezli ve r yarıçaplı *açık yuvar* diyeceğiz. ρ metriğinin başkasıyla karışması kuşkusu olmadığı zaman $B_\rho(a, r)$ yerine, gösterimde basitliği sağlamak için, $B(a, r)$ yazacağız.

Şimdi metrik uzaydan bir topolojik uzayın elde edilişini açıklayacağız.

Bunun için, bir metrik uzayda açık yuvarların bir topoloji tabanı olduğunu göstermek yetecektir. Bu topolojiye, söz konusu metriğin ürettiği metrel topoloji diyeceğiz.

Önerme 17.3.1. *Bir metrik uzayda iki açık yuvarın arakesiti boş değilse, bu arakesite ait her noktaya karşılık, bu noktayı merkez kabul eden ve arakesit tarafından kapsanan açık bir yuvar vardır.*

İSPAT: (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Göreceğiz ki eğer

$$c \in B(a, r_1) \cap B(b, r_2) \tag{17.44}$$

ise

$$B(c, r) \subset B(a, r_1) \cap B(b, r_2) \tag{17.45}$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. $c \in B(a, r_1)$ olduğundan $\rho(a, c) < r_1$ dir, ki buradan $r_1 - \rho(a, c) > 0$ yazabiliriz. Benzer olarak, $r_2 - \rho(b, c) > 0$ olacağı da apaçıktır. Şimdi

$$r = \inf\{r_1 - \rho(a, c), r_2 - \rho(b, c)\}$$

diyelim. Bu durumda aradığımız (17.45) bağıntısı sağlanacaktır. Gerçekten, $x \in B(c, r)$ ise,

$$\begin{aligned}\rho(x, a) &\leq \rho(x, c) + \rho(c, a) \\ &< r + \rho(c, a) \\ &\leq [r_1 - \rho(c, a)] + \rho(c, a) \\ &= r_1\end{aligned}$$

olacaktır. Bu, $x \in B(a, r_1)$ olması demektir. Benzer yolla $x \in B(b, r_2)$ olduğu da gösterilebilir. Bu son iki içerme aradığımız kapsamayı verir.

Teorem 17.3.1. *Bir metrik uzayın bütün açık yuvarlarından oluşan aile bir topoloji tabanıdır.*

İSPAT: (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Bu metrik uzayın bütün açık yuvarlarından oluşan aileyi $\mathscr{B}$ ile gösterelim; yani

$$\mathscr{B} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

olsun. Şimdi $\mathscr{B}$ ailesinin bir topoloji tabanı olduğunu göstereceğiz. Bu iş için, $\mathscr{B}$ ailesinin, topoloji tabanı için gerekli ve yeterli koşulları belirleyen `Önerme` 4.1.3 nin koşullarını sağladığını göstermek yetecektir.

Her $r > 0$ için $x \in B(x, r)$ olduğundan

$$X = \cup\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

olacağı apaçıktır. Demek ki, sözünü ettiğimiz önermenin birinci koşulu sağlanmaktadır. İkinci koşulun sağlandığını ise önceki önermeden biliyoruz.

Artık, bir metrik uzaydan bir topolojik uzayın nasıl elde edildiğini söyleyebiliriz: Bir metrik uzayın bütün açık yuvarlarından oluşan $\mathscr{B}$ ailesinin ürettiği $\mathscr{B}^*$ ailesi, yani açık yuvarların her hangi bir bileşimine eşit olan bütün kümelerden oluşan aile, X kümesi üzerinde bir topolojik yapıdır. Ayrıca, bu topolojinin birtek olduğu üretilen aile tanımından bellidir.

Bu söylediklerimizi derleyerek şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 17.3.2. *Her metrik bir ve yalnız bir tane metrel topoloji belirler.*

Tanım 17.3.2. Bir (X, ρ) metrik uzayı verildiğinde ρ metriğinin X kümesi üzerinde belirlediği topolojiye metrel topoloji diyecek ve $\mathscr{T}_\rho$ ile göstereceğiz. X kümesi üzerindeki farklı iki metrik aynı bir topolojiyi belirliyorsa, bu iki metrik birbirine denktir; yani bir X kümesi üzerinde tanımlı ρ ve μ metrikleri için $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_\mu$ oluyorsa ρ ile μ birbirine *denk iki metriktir* denilir.

$\mathscr{T}_\rho$ topolojisine göre açık kümelere (X, ρ) metrik uzayının açık kümeleri diyeceğiz. $B_\rho(x, r)$ yuvarlarından oluşan $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{T}_d$ topolojisinin bir tabanı idi. Dolayısıyla, bu yuvarların herbirisi açık bir kümedir. Bu kümelere açık yuvarlar denmesinin nedeni budur.

Bir topolojik uzaydaki açık kümeler, topoloji tabanına ait kümelerin bir bileşimine eşit olduğuna göre, bir metrik uzaydaki her açık küme, açık yuvarların bir bileşimine eşit olacaktır.

Önerme 17.3.2. *Gerçel sayılar üzerinde tanımlanan salt metriğin belirlediği metrel topoloji salt topolojidir.*

İSPAT: Her $a, b \in \mathbb{R}$ için, $c = (a+b)/2$ ve $r = (b-a)/2$ olmak üzere

$$B(c, r) = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

dir. Demek ki gerçel eksenin her açık aralığı, salt metriğe göre açık bir yuvar ve salt topolojiye göre de açık bir kümedir.

Önerme 17.3.3. $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ *vektör uzayı üzerinde tanımlanan* $\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, \mathfrak{s}_n$ *metrikleri birbirlerine denktirler.*

İSPAT: $\mathscr{T}_\mathfrak{p} = \mathscr{T}_\mathfrak{m} = \mathscr{T}_{\mathfrak{s}_n}$ olduğunu göstermek için, birisinin tabanına ait olan bir kümenin ötekinin tabanına ait bir kümeyi kapsadığını göstermek yetecektir (bkz. Önerme 4.1.2). (17.28), (17.29) ve (17.30) tanımlamaları kullanılırsa, istenenler aşağıdaki kapsamalardan çıkar:

$$B_{\mathfrak{s}_n}(x, r) \supset B_\mathfrak{p}\left(x, \frac{r}{2}\right) \supset B_{\mathfrak{s}_n}\left(x, \frac{r}{4}\right)$$

ve

$$B_{\mathfrak{s}_n}(x, r) \supset B_\mathfrak{m}\left(x, \frac{r}{2}\right) \supset B_{\mathfrak{s}_n}\left(x, \frac{r}{4}\right)$$

$\mathbb{R}^2$ vektör uzayında, bunların geometrik şekilleri çizilirse, kapsamalar kolayca görülebilir.

Örnek 17.3.1. Gerçel sayılar kümesi üzerinde

$$\nu(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$$

diye tanımlı ν metriği ile $\mathfrak{s}(x, y) = |x - y|$ diye tanımlı $\mathfrak{s}$ salt metriği birbirlerine denktirler.

İSPAT: ν nün $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik olduğunu biliyoruz. O halde $\mathscr{T}_{\mathfrak{s}} = \mathscr{T}_{\nu}$ olduğunu göstermek yetecektir. $f(x) = x/(1+|x|)$ dönüşümünün, salt topolojiye göre, $\mathbb{R}$ den $(-1,+1)$ aralığı üzerine bir eşyapı dönüşümü olduğunu göstermiştik. Şimdi bir $a \in \mathbb{R}$ noktası ile bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan

$$f[B_{\mathfrak{s}}(a,\delta)] \subset B_{\mathfrak{s}}(f(a),\epsilon)$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} |a-x| < \delta &\Rightarrow |f(a) - f(x)| < \epsilon \\ &\Rightarrow \left| \frac{a}{1+|a|} - \frac{x}{1+|x|} \right| \\ &\Rightarrow \nu(a,x) < \epsilon \end{aligned}$$

çıkar, yani her $B_{\nu}(a,\epsilon)$ açık yuvarına karşılık

$$B_s(a,\delta) \subset B_{\nu}(a,\epsilon) \tag{17.46}$$

olacak biçimde bir $B_s(a,\delta)$ açık yuvarı vardır.

Tersine olarak f^{-1} ters fonksiyonu da sürekli olduğundan, bir $B_s(a,r)$ açık yuvarı verildiğinde

$$f^{-1}[F_s(f(a),q)] \subset B_s(a,r)$$

olacak biçimde bir $B_s(f(a),q)$ açık yuvarı vardır. O halde

$$|f(x) - f(a)| < q \Rightarrow |x-a| < r$$

$$\left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{a}{1+|a|} \right| < |x-a| < r$$

olur. Bu ise

$$\nu(a,x) < q \Rightarrow s(a,x) < r$$

olması demektir, ki buradan

$$B_{\nu}(a,q) \subset B_s(a,r) \tag{17.47}$$

çıkar. (17.46) ve (17.47) bağıntıları bize, a noktasının $\mathscr{T}_{\mathfrak{s}}$ topolojisine göre komşuluk ailesinin $\mathscr{T}_{\nu}$ topolojisine göre komşuluklar ailesine eşit olduğunu söyler. Her $a \in \mathbb{R}$ için bu özelik var olduğundan $\mathscr{T}_{\mathfrak{s}} = \mathscr{T}_{\nu}$ olduğu, yani $\mathfrak{s}$ metriği ile ν metriğinin denk olduğu ortaya çıkar.

Önerme 17.3.4. *(X, ρ) bir metrik uzay olsun ve bir $a \in X$ öğesi ile bir $r > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda*

$$D(a, r) = \{x : d(a, r) \leq r\}$$

kümesi kapalıdır.

İSPAT: Bunun için $D(a, r)$ kümesinin tümleyeni olan $D' = \{x : \rho(a, x) > r\}$ kümesinin açık olduğunu gösterelim. $y \in D'$ ise $\rho(a, y) > r$ olacağından $2\epsilon = \rho(a, y) - r$ dersek $\epsilon > 0$ olacaktır. Bu durumda $B_\rho(y, \epsilon) \subset D'$ olduğundan, y öğesi D' kümesinin bir iç noktası olacaktır. Her $y \in D'$ için aynı iş yapılabileceğine göre D' kümesi açıktır; dolayısıyla $D(a, r)$ kümesi kapalıdır.

Bu özellikten dolayı $D(a, r)$ kümesine a merkezli, r yarıçaplı *kapalı yuvar (disk)* diyeceğiz.

Örnek 17.3.2. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt değer metriğini düşünelim. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $c = (a + b)/2$ ve $r = (b - a)/2$ olmak üzere

$$D(c, r) = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

olur. Gerçel eksen üzerindeki bu kümelere, kapalı aralık denmesinin nedeni budur.

Şimdi de metrel topolojilerde komşuluklar sistemiyle açık yuvarlar arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Her $r > 0$ için $x \in B(x, r)$ olduğu düşünülürse, $B(x, r)$ kümesinin $\mathscr{T}_\rho$ topolojisine göre, x noktasının açık bir komşuluğu olduğu görülür. Bu nedenle, $B(x, r), r > 0$, yuvarına x noktasının r yarıçaplı *açık yuvarsal komşuluğu* diyeceğiz.

Önerme 17.3.5. *Her $x \in B(a, r)$ için $B(x, \epsilon) \subset B(a, r)$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır.*

İSPAT: Bu iş için $\epsilon < r - \rho(a, x)$ almak yetecektir. Gerçekten $z \in B(x, \epsilon)$ ise, $\rho(x, z) < \epsilon$ olduğundan,

$$d(a, z) \leq \rho(a, x) + \rho(x, z) < \rho(a, x) + r - \rho(a, x) = r$$

çıkar ki bu $z \in B(a, r)$ olması demektir. Bu, aradığımız şeyi verir.

Önerme 17.3.6. *$T \in \mathscr{T}_\rho$ ise, her $x \in T$ için $B(x, \epsilon) \subset T$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır.*

İSPAT: Açık yuvarlardan oluşan $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{T}_\rho$ metrel topolojisi için bir taban olduğuna göre, verilen $x \in T$ öğesini içeren ve verilen T kümesi tarafından kapsanan bir $B(a,r)$ yuvarı vardır.

Artık bu yuvara, önceki önermeyi uygularsak, $B(x,\epsilon) \subset B(a,r) \subset T$ olacak şekilde bir $B(x,\epsilon)$ açık yuvarının varlığı söylenebilir.

Teorem 17.3.3. *Bir metrik uzaydaki bir öğenin yuvarsal komşuluklarından oluşan aile, o öğenin bir yerel tabanıdır.*

İSPAT: (X,ρ) metrik uzayındaki bir x öğesinin $\mathscr{T}_d$ topolojisine göre komşulukları ailesine $\mathscr{B}(x)$ diyelim. $V \in \mathscr{B}(x)$ ise, komşuluk tanımı uyarınca, $x \in T \subset V$ olacak şekilde bir $T \in \mathscr{T}_\rho$ varolacaktır. Buna yukarıdaki önermeyi uygularsak, $x \in B(x,\epsilon) \subset T \subset V$ özeliğini sağlayan bir $B(x,\epsilon)$ açık yuvarının varlığı ortaya çıkar. Bu özelik, teoremin ispatını verir.

Sonuç 17.3.1. *(X,ρ) bir metrik uzay olsun ve bir $A \subset X$ alt-kümesi verilsin. A kümesinin $\mathscr{T}_\rho$ metrel topolojisine göre açık olması için gerekli ve yeterli koşul, her $a \in A$ öğesinin A kümesi tarafından kapsanan açık yuvarsal bir komşuluğunun varolmasıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: `Önerme` 17.3.6 den çıkar.

Yeterliği: Eğer her $a \in A$ için $B(a,\epsilon(a)) \subset A$ olacak şekilde bir $B(a,\epsilon(a))$ açık yuvarı varsa

$$A = \cup_{a\in A} B(a,\epsilon(a))$$

olur ve de açık kümelerin bir bileşimine eşit olduğundan $A \in \mathscr{T}_\rho$ çıkar.

Sonuç 17.3.2. *Metrel topolojiler Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlar.*

İSPAT: $(X, \mathscr{T}_\rho$ uzayında her hangi bir x öğesinin sayılabilir bir komşuluklar tabanı olduğunu göstermek yetecektir. Her $r > 0$ sayısına karşılık $(1/n) < r$ olacak biçimde bir n doğal sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$B(x, 1/n) \subset B(x,r)$$

olacaktır. Buradan

$$\{B(x,1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

ailesinin x noktasının bir yerel tabanı olduğu çıkar.

Örnek 17.3.3. Gerçel sayılar üzerindeki salt topoloji bir metrel topoloji olduğundan Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlar. Daha genel olarak $\mathbb{R}^n \quad (n \geq 1)$ üzerindeki salt topoloji Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlar.

Önerme 17.3.7. *Ayrılabilir metrel uzaylar İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlarlar.*

İSPAT: $(X, \mathscr{T}_\rho)$ metrel uzayı ayrılabilir ise X kümesinin sayılabilir yoğun bir alt kümesi vardır. Bu kümeye S diyelim. Sonra merkezleri S ye ait bir öğe ve yarıçapları bir rasyonel sayıya eşit olan yuvarların oluşturduğu aileye $\mathscr{B}$ diyelim; yani

$$\mathscr{B} = \{S(a,q) : a \in S, q \in Q\}$$

olsun. Bu ailenin sayılabilir olduğu apaçıktır. Dolayısıyla, bu ailenin $\mathscr{T}_\rho$ topolojisi için bir taban olduğunu gösterebilirsek, ispat bitecektir. Bunun için her hangi bir $\mathscr{T}_\rho$ açık kümesinin $\mathscr{B}^*$ ailesine ait olduğunu göstermek yetecektir. Taban tanımı uyarınca her $x \in T$ için $x \in B(a,q) \subset T$ olacak biçimde bir $B(a,q) \in \mathscr{B}$ açık yuvarının varlığını göstermeliyiz.

`Önerme` 17.3.6 uyarınca $B(x,r) \subset T$ olacak biçimde bir $B(x,r)$ açık yuvarı vardır. Gerekirse biraz daha küçülterek, bu yuvarın r yarıçapının rasyonel bir sayı olduğunu varsayalım. B kümesi yoğun olduğundan, S ye ait bir $a \in B(x, r/3)$ öğesi seçilebilir. Şimdi rasyonel bir q sayısını $r/3 < q < 2r/3$ olacak biçimde seçersek,

$$x \in B(a,q) \subset B(x,r) \subset T$$

olur ve ispat biter.

Uyarı 17.3.1. Bazı metrik uzaylarda $D(a,r)$ kapalı yuvarı $B(a,r)$ açık yuvarını kapsayan en küçük kapalı kümedir. Başka bir deyişle, $B(a,r)$ kümesinin kaplamı, bazı uzaylarda, $D(a,r)$ kümesine eşittir. Ancak, bu özelik genel olarak doğru değildir.

17.3.1 PROBLEMLER

1. (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Her $(x,y) \in X \times X$ için $\delta(x,y) = \inf\{1, \rho(x,y)\}$ diyelim. Bu durumda ρ ile δ metriklerinin denk olduğunu; yani $\mathscr{T}_\rho = \mathscr{T}_\delta$ olduğunu gösteriniz.

2. ρ ile δ bir X kümesi üzerinde tanımlı iki metrik olsun. Eğer her $(x,y) \in X \times X$ için

$$a\delta(x,y) \leq \rho(x,y) \leq b\delta(x,y)$$

eşitsizlikleri sağlanacak biçimde pozitif a ve b sayıları varsa, ρ ile δ nın denk olduğunu gösteriniz.

3. `Örnek` 17.2.1 teki δ metriğini X yerine $\mathbb{R}^2$ koyarak düşününüz. Başlangıç merkezli açık ve kapalı birim yuvarları bulunuz. Açık birim yuvarın kaplamı kapalı birim yuvara eşit midir? Birim yuvarın kenar kümesi nedir?

4. (a, b) açık aralığının kaplamının [a,b] kapalı aralığı olduğunu gösteriniz. Daha genel olarak, $\mathbb{R}^n$ ya da $\mathbb{C}^n$ uzaylarında, Öklid metriğine göre $B(a, r)$ açık yuvarlarının kaplamlarının $D(a, r)$ kapalı yuvarları olduğunu gösteriniz.

5. `Örnek` 17.2.1 teki δ metriğinin X kümesi üzerinde tanımladığı metrik topolojisinin ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

6. Önceki bölümde tanımlanan $\delta, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ ve $\mathfrak{s}_n$ metriklerini $\mathbb{R}^2$ üzerinde düşününüz. Merkezleri düzlemde $0 = (0, 0)$ noktası ve yarıçapları $r = 1$ olan açık yuvarları, herbirisi içinayrı ayrı çiziniz.

17.4 EŞMETREL UZAYLAR

Tanım 17.4.1. (X, ρ) ile (Y, μ) metrikimsi iki uzay olsun ve bir $f : X \to Y$ bire-bir-içine fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu uzaklıkları koruyorsa, yani her $x, y \in X$ için

$$\rho(x, y) = \mu(f(x), f(y))$$

eşitliği sağlanıyorsa, f ye *eşmetrel (isometric)* bir dönüşümdür ve f dönüşümü (X, ρ) uzayını (Y, μ) uzayı içine gömüyor denir. Böyle bir dönüşüm varsa (X, ρ) uzayı (Y, μ) içine gömülebilir ve (X, ρ) uzayı ile $(f(X), \mu)$ alt-uzayı eşmetrel eşyapılıdır denir. Bu durumda X uzayının f altındaki resmi olan $f(X)$ alt-uzayına da gömü diyeceğiz. Eğer f dönüşümü bire-bir-örten ise (X, ρ) ile (Y, μ) uzayları *eşmetrel eşyapılı* iki metrik uzay olur.

Örnek 17.4.1. ℓ_2 diziler uzayı ile L^2 fonksiyonlar uzayı *eşmetrel eşyapılıdır.*

Gerçekten klasik Fourier Analizinden bilindiği gibi L^2 uzayına ait her f fonksiyonunun $c = (c_n)$ Fourier katsayıları dizisi ℓ_2 dizi uzayına aittir. Tersine olarak, ℓ_2 uzayına ait her $c = (c_n)$ dizisi L^2 uzayındaki bir f fonksiyonunun

Fourier katsayıları olur. Böylece, $f \to c$ dönüşümü L^2 den ℓ_2 uzayına birebir-örten bir dönüşüm olur. Ayrıca bu biçimde eşlendiklerinde

$$\left(\int |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\| = \|c\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Parseval eşitliği sağlanmaktadır [23], [26]. Buradan bu iki uzayın eşmetrel eşyapılı olduğu çıkar.

Önerme 17.4.1. *Eşmetrel dönüşüm uzaklıkları korur. Oysa denk metrikler uzaklıkları korumayabilirler. Dolayısıyla, denk iki metriğin eşmetrel olması gerekmez.*

Bunun ispatını aşağıdaki örneklerle açıklayacağız.

Örnek 17.4.2. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ Öklit uzayından kendisine tanımlanan

$$f : x \to x + c, \quad (c \in \mathbb{R}^n, \ \ \text{sabit}) \tag{17.48}$$

öteleme dönüşümü, Öklit metriğine göre eşmetrel bir dönüşümdür.

Gerçekten, (17.30) uyarınca

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_n(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| \\ &= \|(x + c) - (y + c)\| \\ &= \|x - y\| \\ &= \mathfrak{s}_n(x, y) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla f dönüşümü $\mathbb{R}^n$ içinde Öklit uzaklıklarını korumaktadır.

Örnek 17.4.3. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ Öklit uzayından kendisine tanımlanan

$$f : x \to ax, \quad (a \in \mathbb{R}, \ \ \text{sabit}) \tag{17.49}$$

boylama dönüşümü, $a \neq 1$ ise, Öklit metriğine göre eşmetrel bir dönüşüm değildir.

İspat:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_n(f(x), f(y)) &= \|ax - ay\| \\ &= |a| \ \ \|x - y\| \\ &= a\mathfrak{s}_n(x, y) \end{aligned}$$

olur. $a \neq 1$ olduğunda f nin uzaklıkları korumadığı ortaya çıkar. Öte yandan, *boylama dönüşümünün* bir topolojik eşyapı resmi olduğunu biliyoruz. Demek ki bir *topolojik eşyapı dönüşümü* bir eşmetrel eşyapı dönüşümü olmak zorunda değildir. Ama bunun tersi her zaman doğrudur; yani her eşmetrel eşyapı dönüşümü bir topolojik eşyapı dönüşümüdür.

17.4.1 Problemler

1. $\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, \mathfrak{s}_n$ metrikleri sırasıyla (17.28), (17.29) ve (17.30) bağıntıları ile tanımlı metrikler olmak üzere $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{p}), (\mathbb{R}^n, \mathfrak{m}), (\mathbb{R}^n, \mathfrak{s}_n)$ uzayları eşmetrik değildirler, ama metrikler denktir. Gösteriniz.

2. Boş olmayan bir X kümesi üzerinde

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} 2, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

metrikleri verilsin. $x \neq y$ için $\delta(x,y) = 1$ ve $\sigma(x,y) = 2$ olduğundan (X,δ) uzayı ile (X,σ) uzayı eşmetrik eşyapılı değildirler. Ama topolojik eşyapılıdırlar. Çünkü δ ve σ metriklerinin her ikisi de X üzerine *ayrık topolojiyi* koyar.

17.5 SINIRLILIK

Tanım 17.5.1. (X,ρ) bir metrik uzay ve A bu uzayın boş olmayan bir altkümesi olsun.

$$\rho(A) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\} \tag{17.50}$$

sayısına A kümesinin *çapı* denilir. Çapı sonlu olan kümelere *sınırlı kümeler*, çapı sonsuz olan kümelere de *sınırsız kümeler* denilir.

Bir kümenin çapının sıfır olması için tek öğeli bir küme olması yeterlidir.
Öklid metriğine göre gerçel eksenin her sonlu aralığı sınırlı bir kümedir. $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki her doğru sınırsız bir kümedir.

Tanım 17.5.2. A ile B kümeleri (X, ρ) metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi olsun. A ile B kümeleri arasındaki *uzaklık*

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\} \tag{17.51}$$

sayısıdır. Özel olarak, bir w öğesinin bir A kümesine uzaklığı

$$\rho(w, A) = \inf\{\rho(w, x) : x \in A\} \tag{17.52}$$

sayısıdır. Buradan, iki küme arasındaki uzaklığın

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(a, B) : a \in A\} \tag{17.53}$$

olduğu yazılabilir.

$a \in A$ ise $\rho(a, A) = 0$ olacağı apaçıktır. Ama $\rho(a, A) = 0$ olması $a \in A$ olmasını gerektirmez. Örneğin, gerçel sayılar üzerindeki salt değer metriğine göre 0 ve 1 noktalarının $A = (0, 1)$ kümesine olan uzaklıkları sıfıra eşittir, ama her ikisi de A kümesine ait değildir.

Bir noktanın bir kümeye uzaklığının sıfır olması aşağıdaki önermeyle belirginleşir.

Önerme 17.5.1. *$\rho(a, A) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $a \in \bar{A}$ olmasıdır.*

İSPAT: $\rho(a, A) = 0$ olması her $r > 0$ için $B(a, r)$ açık yuvarının A ile kesişmesine, ki bu da $a \in \bar{A}$ olmasına denktir.

$A \cap B \neq \emptyset$ ise $\rho(A, B) = 0$ olacağı açıktır. Ama bunun karşıtı doğru değildir. Yani iki küme arasındaki uzaklık sıfır ise bu kümeler kesişmek zorunda değildir. Örneğin, gerçel eksen üzerindeki salt değer metriğine göre $A = (0, 1)$ kümesi ile $B = [1, 2]$ kümesi arasındaki uzaklık sıfıra eşittir; ama A ile B kümeleri kesişmez.

Önerme 17.5.2. *Sınırlı iki kümenin bileşimi de sınırlıdır.*

İSPAT: $x, y \in A \cup B$ olsun. Eğer $x, y \in A$ ise $\rho(x, y) \leq \rho(A)$; eğer $x, y \in B$ ise $\rho(x, y) \leq \rho(B)$ olacaktır. Eğer $x \in A$ ve $y \in B$ ise, sabit $a \in A$ ve $b \in B$ öğelerini rasgele seçelim. Üçgen eşitsizliğinden

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y)$$

yazabiliriz, ki buradan

$$\rho(A \cup B) \leq \rho(a, b) + \rho(A) + \rho(B)$$

çıkar. Bu eşitsizlik her $a \in A$ ve her $b \in B$ için geçerli olduğundan

$$\rho(A \cup B) \leq \rho(A, B) + \rho(A) + \rho(B)$$

olur.

Sonuç 17.5.1. *Sınırlı bir küme, merkezi rasgele seçilen bir yuvar tarafından kapsanır.*

İSPAT: A sınırlı bir küme olsun ve keyfi seçilen bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. Bu noktayı B kümesi yerine koyarsak, önceki önermeden, her $x \in A$ için

$$\rho(x_0, x) \leq \rho(x_0, A) + \rho(A)$$

çıkar. Buradan x_0 merkezli ve $r = \rho(x_0, A) + \rho(A)$ yarıçaplı çemberin A kümesini kapsadığı görülür.

Tanım 17.5.3. Eğer bir $a \in A$ ile bir $b \in B$ için $\rho(a, b) = \rho(A, B)$ oluyorsa, a ile b öğelerine A ile B kümelerinin birbirlerine *en yakın* iki noktası denilir.

İki kümenin birbirlerine en yakın noktaları olmayabilir.

Örnek 17.5.1. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt metriğe göre $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ alt kümesi ile $B = \{0\}$ kümesinin birbirlerine en yakın noktaları yoktur. Çünkü iki küme arasındaki uzaklık $\rho(A, \{0\}) = 0$ olduğu halde, her n için $\rho(\frac{1}{n}, 0) > 0$ dır.

Tanım 17.5.4. (X, ρ) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın bir örtüsüne ait kümelerin herbirisinin çapı bir ϵ sayısından küçük kalıyorsa, bu örtüye A nın bir *ϵ-örtüsüdür* denilir.

Eğer her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık sonlu bir ϵ-örtüsü varsa, A kümesine *tümüyle sınırlıdır* diyeceğiz. Tümüyle sınırlı olan kümelerin sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten A tümüyle sınırlı bir küme ise, her hangi bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, A nın

$$\{A_i : i = 1, 2, ..., n\}$$

gibi sonlu bir ϵ-örtüsü olacaktır. Her i için A_i kümesinden bir a_i öğesi seçelim.

$$\alpha = \max\{\rho(a_i, a_k) : i, k = 1, 2, \ldots, n)\}$$

olsun. Her $x, y \in A$ için, i ile k rasgele seçilmek üzere,

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,a_i) + \rho(a_i,a_k) + \rho(a_k,y) \leq \alpha + 2\epsilon$$

olur. Buradan $\rho(A)$ çapının sınırlı olduğu çıkar.

Bu özelliğin karşıtı doğru değildir; yani sınırlı bir küme tümüyle sınırlı olmayabilir. Örneğin l^2-uzayında, yalnızca i -inci terimi 1 ve öteki terimleri sıfır olan

$$e_i = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$$

dizilerinden oluşan $E = \{e_i : i = 1,2,\ldots\}$ kümesi sınırlıdır. Çünkü her hangi iki öğesi arasındaki uzaklık $\sqrt{2}$ dir. Ama bu küme tümüyle sınırlı değildir. Zira ϵ sayısı olarak $\sqrt{2}$ den küçük birsayı seçildiğinde, E kümesinin bir ϵ-örtüsü yoktur.

17.5.1 Problemler

1. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki Öklit metriğine göre $xy = 1$ hiperbolü ile $y = 0$ doğrusu kesişmeyen kapalı iki alt kümedir. Her iki küme sınırsızdır ve aralarındaki uzaklık sıfıra eşittir. Gösteriniz.

2. Salt metriğe göre $\mathbb{R}$ uzayında $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ile $\left\{(n + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ dizisinin öğelerinden oluşan A kümesi veriliyor. Bu kümeler kapalı mıdır? Bu kümeler kesişir mi? Bu kümeler sınırlı mıdır? Bu kümeler arasındaki uzaklık nedir?

3. Bir metrik uzaydaki sonlu her kümenin sınırlı olduğunu gösteriniz.

4. Bir metrik uzayın her A alt kümesi için $\rho(A) = \rho(\bar{A})$ olduğunu gösteriniz.

17.6 DÜZGÜN SÜREKLİLİK

(X, ρ) ile (Y, σ) iki metrik uzay olsun ve bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Tanım uyarınca, f fonksiyonunun bir x_0 noktasında sürekli olması için, $f(x_0)$ öğesinin her $B_\sigma(f(x_0), \epsilon)$ komşuluğuna karşılık,

$$f(B_\rho(x_0, \delta)) \subset B_\sigma f(x_0, \epsilon)$$

olacak biçimde, x_0 noktasının bir $B_\rho(x_0, \delta)$ komşuluğunun olması gerekli ve yeterlidir. Başka bir deyişle;

Tanım 17.6.1. $f : X \to Y$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\rho(x_0, x) < \delta \Rightarrow p(f(x_0), f(x)) < \epsilon$$

olacak biçimde, yalnız verilen x_0 noktasına ve ϵ sayısına bağlı olan, bir $\delta > 0$ sayısının var olmasıdır.

Metrik topolojilerin *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağladıklarını biliyoruz. Öyleyse, Teorem 11.2.2 uyarınca aşağıdaki özeliği söyleyebiliriz.

Teorem 17.6.1. *$f : X \to Y$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her (x_n) dizisi için,*

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \tag{17.54}$$

olmasıdır.

Bu özelliği her noktada düşünürsek, *yaygın (global) süreklilik* için şu teoremi söyleyebiliriz.

Teorem 17.6.2. *$f : X \to Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her x_n dizisi için,*

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

olmasıdır.

Tanım 17.6.2. (X, ρ) ile (Y, σ) iki metrik uzay olsun ve bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\rho(x, y) < \delta \Rightarrow p(f(x), f(y)) < \epsilon$$

olacak biçimde, yalnız verilen ϵ sayısına bağlı, bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna *düzgün süreklidir*, denilir.

Düzgün süreklilik ile süreklilik tanımları birbirlerinden ayrıdır. Birinci fark metrik uzaylarda beliren farktır: Süreklilik tanımında, verilen ϵ sayısına karşılık varlığı söylenen δ sayısı hem ϵ sayısına hem de x_0 noktasına bağlıdır. Başka bir deyişle, ϵ sayısı sabit kalsa bile, x_0 noktası değişince δ sayısı da değişebilir. Düzgün süreklilikte ise, δ sayısı noktaya bağlı değildir. İkinci ayrılık ise, düzgün sürekliliğin her hangi bir topolojik uzay üzerinde tanımlanamamasıdır. Çünkü buradaki pozitif ϵ, δ sayıları ile verilen komşuluklar her hangi bir topolojik uzayda verilemez. Ancak, düzgün süreklilik kavramı, metrik uzaylardan daha genel olan *Düzgün Yapılar* üzerine genelleştirilir.[1]

Teorem 17.6.3. *(X, ρ) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. X den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan $x \to \rho(x, A)$ fonksiyonu düzgün süreklidir.*

İSPAT: Rasgele $x, y \in X$ öğeleri verilsin. Her $\epsilon > 0$ sayısına krşılık öyle bir $z \in A$ öğesi vardır ki

$$\rho(y, z) \leq \rho(y, A) + \epsilon$$

olur, ki buradan

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A) + \epsilon$$

eşitsizliği çıkarılabilir. Öte yandan $\rho(x, A) \leq \rho(x, z)$ olduğu düşünülürse

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A) + \epsilon$$

olur. Bu eşitsizlik her $\epsilon > 0$ sayısı için varolduğundan, $\epsilon \to 0$ iken de geçerlidir; yani

$$\rho(x, A) - \rho(y, A) \leq \rho(x, y)$$

olur. Benzer eşitsizliği, x ile y nin yerlerini değiştirerek de elde edebileceğimizden

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$$

sonucu çıkar. Bu, aradığımız düzgün sürekliliktir.

Bu teoremde A kümesi yerine tek öğeli $\{y\}$ kümesini koyarsak şu sonucu elde ederiz:

Sonuç 17.6.1. *(X, ρ) metrik uzayından gerçel sayılara tanımlı olan $x \to \rho(x, y)$ fonksiyonu, her sabit y için, düzgün süreklidir.*

Teorem 17.6.4. *Her metrik uzay normal bir topolojik uzaydır.*

İSPAT: (X, ρ) bir metrik uzay olsun ve bunun kesişmeyen, kapalı iki alt kümesi A ve B olsun. Kolayca görüldüğü üzere

$$f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$$

fonksiyonu Urysohn Aksiyomunu sağlar (bkz. Urysohn Teoremi 14.7.1).

17.6.1 Problemler

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri $(0, 1)$ aralığı üzerinde düzgün süreklidir?

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \\ f(x) &= x^3 \\ f(x) &= \sin x \\ f(x) &= \sin \frac{1}{x} \\ f(x) &= \frac{1}{1-x} \\ f(x) &= \frac{1}{2-x} \end{aligned}$$

2. Düzgün sürekli her fonksiyonun sürekli olduğunu gösteriniz.

3. Düzgün sürekli iki fonksiyonun bileşkesinin de düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

4. Sürekli olmayan bir fonksiyonun bir alt-uzaya kısıtlanmışı sürekli olabilir. Örneğin, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \quad \text{rasyonel} \\ 1, & x \quad \text{irrasyonel} \end{cases}$$

diye tanımlanan *Dirichlet fonksiyonu* sürekli değildir. Ama bunun **Q** rasyonel sayılar kümesine kısıtlaması süreklidir. Neden?

17.7 LİMİTLER ve CAUCHY DİZİLERİ

Bir topolojik uzaydaki (x_n) dizisinin yakınsak olmasını tanımlamıştık. Bu kesimde metrik uzaylardaki dizilerin yakınsaklığını inceleyeceğiz. `Teorem` 17.3.3 uyarınca, $\{B_\rho(x,r), r > 0\}$ ailesi x noktasının bir yerel tabanı olduğundan, (bkz. `Tanım` 11.1.2, $(X, \mathscr{T}_\rho)$ metrik uzayında şuna denk olacaktır:

Teorem 17.7.1. *(X,ρ) metrik uzayındaki (x_n) dizisinin x noktasına yakınması için gerekli ve yeterli koşul, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x) < \epsilon$$

olacak biçimde bir n_0 doğal sayısının var olmasıdır.

(x_n) dizisinin x noktasına yakınsadığını, kısaca,

$$x_n \to x$$
$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$$

gösterimlerinden birisiyle belirteceğiz ve x noktasına (x_n) *dizisinin limiti*, diyeceğiz. Metrik uzaylar Hausdorff ayırma aksiyomunu sağladığından, `Teorem` 14.3.1 uyarınca hemen şunu söyleyebiliriz:

Teorem 17.7.2. *(X,ρ) metrik uzayındaki bir (x_n) dizisinin ençok bir limiti var olabilir.*

Metrik uzaylar Birinci Sayılabilme Aksiyomunu sağladığından `Önerme` 11.2.1 den şu çıkar:

Teorem 17.7.3. *Metrik uzayın her hangi bir alt kümesi A olsun. $a \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $a_n \to a$ olacak biçimde bir $(a_n) \subset A$ dizisinin var olmasıdır.*

Tanım 17.7.1. (X,ρ) metrik uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq n_0$ olduğunda $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ olacak biçimde, verilen ϵ sayısına bağlı, bir n_0 doğal sayısı varsa, (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisidir*, denilir.

Örnek 17.7.1. salt metriğe göre, doğal sayılardan oluşan (n) dizisi bir *Cauchy dizisi* değildir. Çünkü n ile m ne denli büyük seçilirse seçilsin $n \neq m$ olduğunda $\mathfrak{s}(n,m) = |n-m| \geq 1$ olur.

Bir dizinin *Cauchy dizisi* olup olmaması metrik bir niteliktir. Bunu göstermek için, yukarıdaki dizinin başka bir metriğe göre Cauchy olduğunu gösterelim.

Örnek 17.7.2. ν metriği Örnek (17.37) ile tanımlanan metrik olmak üzere (n) doğal sayılar dizisi $(\mathbb{R}, \nu)$ uzayı içinde bir *Cauchy dizisidir.*

İSPAT: her hangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Genelliği bozmadan $n > m$ alabiliriz. Buradan

$$\nu(n,m) = \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right| \leq \frac{1}{(1+m)}$$

eşitsizliği çıkar. Dolayısıyla

$$\frac{(1-\epsilon)}{\epsilon} < n_0$$

olacak biçimde doğal bir n_0 sayısı seçersek

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \nu(n,m) < \epsilon$$

çıkar; yani doğal sayılar dizisi μ metriğine göre bir *Cauchy dizisi* olur.

Teorem 17.7.4. *Bir metrik uzayda yakınsak her dizi bir* Cauchy *dizisidir.*

İSPAT: (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyorsa, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki

$$n \geq n_0 \Rightarrow (\rho(x, x_n)) < \frac{\epsilon}{2}$$

yazılabilir. Bu ikisinden ve [M3] den

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x, x_m) < \epsilon$$

çıkar ki bu isteneni verir.

Bu teoremin karşıtı, çoğunlukla geçersizdir; yani bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi, o uzay içinde bir limite yakınsamayabilir. Bu nitelik, metrik uzayların tamlanması (completion) olgusuna yol açar.

Örnek 17.7.3. $a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ sonsuz onlu (decimal) gösterimiyle temsil edilen bir irrasyonel sayı düşünelim. Bu sayıya karşılık aşağıdaki diziyi kuralım.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1 \\
x_2 &= 0, a_1 a_2 \\
x_3 &= 0, a_1 a_2 a_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} \\
x_n &= 0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n
\end{aligned}
$$

Bu dizinin terimleri birer rasyonel sayıdır ve kolayca görüleceği gibi, rasyonel sayılar kümesi üzerindeki salt değer metriğinin tanımladığı $(\mathbf{Q}, \mathfrak{s})$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Öte yandan bu dizinin a limitine yakınsadığı da hemen görülebilir. Ama a sayısı irrasyonel olduğundan $\mathbf{Q}$ içinde değildir. Demek ki $(\mathbf{Q}, \mathfrak{s})$ metrik uzayındaki bu (x_n) Cauchy dizisi $\mathbf{Q}$ içndeki bir limite yakınsamıyor, bu uzayın bir üst uzayı olan $(\mathbb{R}, \mathfrak{s})$ içindeki bir limite yakınsıyor. Sonraki bölümde bu olguyu daha genel biçimde inceleyeceğiz.

17.7.1 Problemler

1. Gerçel ya da karmaşık sayılardan oluşan bir (x_n) dizisinin, salt topolojiye göre, bir x limitine yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

olacak biçimde yalnız ϵ 'a bağlı doğal bir n_0 sayısının var olmasıdır. Gösteriniz.

2. Bir metrik uzayda yakınsak her dizi sınırlıdır. Gösteriniz.

3. Alt uzayda yakınsak dizi üst uzayda da yakınsar. Neden? Bu önermenin tersi doğru mudur?

4. Bir metrik uzay içindeki (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul $E_n = \{x_k : k \geq n\}$ olmak üzere $\rho(E_n) \to 0$ olmasıdır. İspatlayınız.

5. Bir Cauchy dizisinin her hangi bir alt dizisinin de bir Cauchy dizisi olacağını gösteriniz.

6. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\sigma(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ olsun. X içindeki bir (x_n) dizisinin ρ metriğine göre bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul σ metriğine göre bir Cauchy dizisi olmasıdır. Gösteriniz.

7. Bir Cauchy dizisinin düzgün sürekli bir fonksiyon altındaki resminin de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

17.8 TAMLIK

Tanım 17.8.1. (X, ρ) metrik uzayındaki her *Cauchy dizisi* X içindeki bir limite yakınsarsa, (X, ρ) metrik uzayı *tamdır (complete)* denilir.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi, *salt değer* metriğine göre rasyonel sayılar tam olmayan bir metrik uzaydır. Aynı metriğe göre gerçel sayılar kümesinin *tamlığını* biraz sonra göreceğiz.

Teorem 17.8.1. *[Cantor arakesişme özelliği] (X, ρ) tam bir metrik uzay ve (F_n) boş olmayan kapalı kümelerden oluşan azalan bir dizi olsun. Eğer $\rho(F_n) \to 0$ ise*

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

arakesitinin birtek öğesi vardır.

İSPAT: Dizinin çapları azalarak sıfıra gittiğinden F arakesiti farklı iki nokta içermez. (Neden?) Öyleyse, F nin boş olmayacağını göstermek yetecektir. Her bir F_n kümesinden bir x_n öğesi seçelim. $\rho(F_n) \to 0$ olduğundan x_n bir Cauchy dizisi olacaktır. Neden? X tam olduğundan, bu dizinin bir $x \in X$ limiti vardır. Bu X noktasının F arakesitine ait olduğunu göstermek yetecektir. Yani her m doğal sayısı için $x \in F_m$ olduğunu göstermeliyiz. $x_n \to x$ olduğundan, bu dizinin her alt dizisi de x limitine yakınsayacaktır. Her m doğal sayısı için $\{x_n : n \geq m\}$ alt dizisi F_m kümesine aittir.

Şimdi bu önermenin karşıtını söyleyelim.

Önerme 17.8.1. *Bir metrik uzayda hiç birisi boş olmayan ve çapları sıfıra giden iç-içe kapalı kümelerden oluşan her dizinin arakesiti boş değilse bu uzay tamdır.*

İSPAT: (X, ρ) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir Cauchy dizisi olsun. Bu dizinin X uzayı içindeki bir limite yakınsadığını göstereceğiz.

$$A_n = \{x_k : k \geq n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

kümeler dizisini kuralım. Bu dizinin boş olmayan kümelerden oluştuğu ve iç-içe olduğu; yani

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

olduğu apaçıktır. Öte yandan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\bar{A}_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(A_n) = 0 \tag{17.55}$$

dır. Neden? Öyleyse, varsayımımız uyarınca enaz bir

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$$

öğesi varolmalıdır. Eğer $x_n \to x$ olduğnu gösterebilirsek ispat bitecektir. her hangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. (17.55) gereğince, öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki

$$\rho(\bar{A}_{n_0} < \epsilon)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow x_n, x \in \bar{A}_{n_0} \\ &\Rightarrow \rho(x_n, x) < \epsilon \end{aligned}$$

çıkar.

Önerme 17.8.2. *Bir metrik uzayda tam olan her alt uzay kapalıdır.*

İSPAT: (X, ρ) metrik uzayının bir (A, ρ) alt uzayı tam olsun. $\bar{A} \subset A$ olduğunu göstermek yetecektir. $x \in \bar{A}$ ise, `Teorem` 17.7.3 uyarınca, $x_n \to x$ olacak biçimde bir $(x_n) \subset A$ dizisi vardır. Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisi olduğundan (x_n) de bir *Cauchy dizisidir*. Öyleyse, bu dizinin limiti olan x noktası *tam* olan A uzayına ait olacaktır.

Önerme 17.8.3. *Tam bir uzayın kapalı her alt uzayı da tamdır.*

İSPAT: (X, ρ) tam bir uzay ve $A \subset X$ kapalı bir alt küme olsun. $(x_n) \subset A$ bir Cauchy dizisi ise, tam X uzayı içinde bir x limitine yakınsar. `Teorem` 17.7.3 uyarınca $x \in \bar{A}$ çıkar. Oysa A kapalı olduğundan $A = \bar{A}$ dır. Demek ki A içindeki her *Cauchy dizisinin* limiti, A içindedir.

Son iki önermeyi birleştirirsek şunu söyleyebiliriz :

Teorem 17.8.2. *(X, ρ) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olduğunda aşağıdaki iki özelik eşdeğerdir:*

(i) $A = \bar{A}$

(ii) A tamdır.

Önerme 17.8.4. *(X, ρ) bir metrik uzayında sınırlı ve kapalı olan her alt küme tam bir alt uzay oluyorsa (X, ρ) uzayı da tamdır.*

İSPAT: $(x_n) \subset X$ bir Cauchy dizisi olsun.

$$m, n \geq p \quad \Rightarrow \quad \rho(x_n, x_m) \leq 1$$

olacak biçimde bir p doğal sayısı seçelim. her hangi bir $a \in X$ seçelim ve

$$r = \sup \{\rho(a, x_1), \rho(a, x_2), \ldots, \rho(a, x_p)\}$$

diyelim. Bu durumda $1 \leq j \leq p$ olduğunda $x_j \in D(a, r) \subset B(a, r+1)$ olur. Ayrıca $j \geq p$ olduğunda

$$\rho(a, x_j) \leq \rho(a, x_p) + \rho(x_p, x_j) \leq r + 1$$

olacaktır ki bu $j \geq p$ için $x_j \in D(a, r+1)$ olmasını gerektirir. Öyleyse

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D(a, r+1)$$

dir. Öte yandan kapalı $D(a, r+1)$ yuvarının (disk) sınırlı olduğu açıktır; dolayısıyla varsayımımız uyarınca *tam bir alt uzaydır* ve (x_n) Cauchy dizisinin bu kapalı yuvar içinde bulunan bir x limiti vardır, ki bu limit X uzayı içindedir. X içindeki her Cauchy dizisi için aynı şey yapılabileceğinden, ispat biter.

17.8.1 Problemler

1. `Örnek` 17.2.1 teki uzayın tam olduğunu gösteriniz.

2. Sonlu bir metrik uzayın tam olduğunu gösteriniz.

3. `Örnek` (17.41) te tanımlanan $\mathfrak{B}(X)$ uzayının tam olduğunu gösteriniz.

17.9 TAMLAMA

Tanım 17.9.1. (X,ρ) metrik uzayı bir (Y,σ) tam metrik uzayı içine gömülebiliyor ve bu *gömü (embedding)* yoğun bir alt uzaya eşit oluyorsa, (Y,σ) uzayına (X,ρ) uzayınının *tamlanmışıdır*, denilir.

Bu kesimde her metrik uzayın tamlanabileceğini ve bir metrik uzayın tamlanmışlarının *eşmetrel eşyapılı* olduklarını göstereceğiz. Matematiğin bir çok dalında önem taşıyan bu olgu, özel olarak, rasyonel sayılardan hareketle gerçel sayıların topolojik yöntemle kuruluşunu sağlar.

Teorem 17.9.1. *Her metrik uzay tamlanabilir. Bir metrik uzayın tamlanmışları birbirlerine* eşmetrel eşyapılıdır.

İSPAT: İspat birkaç adımda bitecektir. Bu adımların zor olmayan uzunca ispatları öğrenciye alıştırma diye bırakılacaktır. Burada yalnızca ispatın iskeleti verilecektir.

1.Adım: $x=(x_n)$ ile $y=(y_n)$ dizileri (X,ρ) uzayında iki Cauchy dizisi ise

$$x \cong y \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n)=0$$

bağıntısını tanımlayalım. $\cong$ ile gösterdiğimiz bu bağıntının X uzayındaki bütün Cauchy dizilerinin oluşturduğu küme üzerinde bir *denklik bağıntısı* olduğu kolayca görülebilir.

2.Adım: Yukarıdaki denklik bağıntısının kurduğu *denklik sınıfları* kümesini $\mathfrak{X}$ ile gösterelim; yani $x=(x_n)$ öğesinin denklik sınıfı

$$[x]=\{y=(y_n) : x\cong y\}$$

olsun. Şimdi

$$\psi([x],[y]) := \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n)$$

olmak üzere $(\mathfrak{X},\psi)$ bir metrik uzay olur.

3.Adım: Her $x\in X$ öğesine karşılık, terimleri bu x öğesine eşit olan $\mathfrak{x} = (x,x,x,\ldots,x,\ldots)$ sabit dizilerini düşünelim. Bu dizilerin belirlediği $\mathfrak{x}$ denklik sınıfları $\mathfrak{X}$ uzayına aittirler ve bir $\mathcal{X}$ alt uzayını oluştururlar. Şimdi X kümesinden $\mathfrak{X}$ kümesine $\varphi(x)=\mathfrak{x}$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm,

$$\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\psi(\varphi(x),\varphi(y))=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\rho(x,y)$$

uyarınca (X, ρ) uzayından $(\mathcal{X}, \psi)$ alt uzayına bir eşmetrel eşyapı dönüşümüdür.

4.Adım: $\mathcal{X}$ kümesinin $\mathfrak{X}$ içinde yoğun olduğunu göstereceğiz. `Teorem` 17.7.3 uyarınca, $\mathfrak{X}$ içindeki her $\mathfrak{p}$ öğesine karşılık, $\mathcal{X}$ içinde $\mathfrak{p}$ öğesine yakınsayan bir dizinin varlığını göstermek yetecektir. Gerçekten, $\mathfrak{p}$ denklik sınıfına ait bir $p = (p_n)$ dizisi düşünelim. Tanımı uyarınca, bu dizi X içinde bir *Cauchy* dizisidir. Şimdi her m doğal sayısına karşılık

$$\varphi(p_m) = \mathfrak{p}_m$$

denklik sınıfını düşünelim.

$$\lim_{n\to\infty} \psi(\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}) = \lim_{m\to\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} \rho(p_m, p_n) \Big) = 0$$

olduğundan $(\mathfrak{p}_m)$ dizisi $\mathfrak{p}$ öğesine yakınsar.

5.Adım: $(\mathfrak{X}, \psi)$ bir tam uzaydır.

Bunu ispatlamk için $\mathfrak{X}$ içindeki her *Cauchy dizisinin* bu uzay içinde bir limite yakınsadığını göstermek yetecektir. $(\mathfrak{x}_n)$ dizisi $\mathfrak{X}$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. $\mathcal{X}$ uzayı $\mathfrak{X}$ içinde yoğun olduğundan, her doğal n sayısına karşılık

$$\psi(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{x}_n) < 1/n$$

olacak biçimde bir $\mathfrak{a}_n \in \mathcal{X}$ öğesi vardır. Bu öğelerden oluşan $(\mathfrak{a}_n)$ dizisi bir *Cauchy dizisidir*. Bu dizi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ dizisinin denklik sınıfı olan $\mathfrak{a}$ öğesine yakınsar. Artık, buradan x_n dizisinin $\mathfrak{a}$ limitine yakınsayacağı kolayca görülür.

6.Adım: $\mathfrak{X}$ ile $\mathfrak{Y}$ metrik uzayın iki *tamlanmışı* ise $\mathfrak{X}$ ile $\mathfrak{Y}$ uzayları eşmetrel eşyapılıdır.

17.10 BAIRE SINIFLANDIRMASI

Tanım 17.10.1. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesinin kaplamının içi boş ise; yani $(\bar{A})^o = \emptyset$ ise, A kümesine *hiç bir yerde yoğun değildir* denilir.

Örnek 17.10.1. Açık ya da kapalı kümelerin kenarları hiç bir yerde yoğun değildir.

Örnek 17.10.2. Tamsayılar kümesi gerçel sayılar içinde, salt topolojiye göre, hiç bir yerde yoğun değildir.

Önerme 17.10.1. *A hiç bir yerde yoğun değilse A' kümesi yoğun bir alt-kümedir.*

Bu önermenin kolay ispatını öğrenciye bir problem olarak bırakıyoruz.

Tanım 17.10.2. Eğer bir topolojik uzay hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşimine eşitse, bu topolojik uzaya *seyrek* bir uzaydır denilir. Seyrek uzaylara *birinci kategoriden* bir uzay; bu kategoriden olmayan uzaylara da *ikinci kategoridendir* diyeceğiz.

Örnek 17.10.3. Tek öğeli bir alt-küme, salt topolojiye göre, $\mathbb{Q}$ içinde hiç bir yerde yoğun değildir.

Dolayısıyla, sayılabilir bir küme olan rasyonel sayılar kümesi, salt topolojiye göre, birinci kategoriden (seyrek) bir uzaydır.

Tanım 17.10.3. Bir topolojik uzayda hiç bir yerde yoğun olmayan kapalı kümelerin her dizisinin bileşimi de hiç bir yerde yoğun değilse, bu uzaya bir *Baire* uzayıdır denilir.

Tanımdan hemen şunu söyleyebiliriz.

Teorem 17.10.1. *$(X, \mathscr{T})$ uzayının bir Baire uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul, kapalı kümelerden oluşan her hangi bir (E_n) dizisi verildiğinde*

$$(\cup E_n)^o \neq \emptyset \Longrightarrow E_m^o \neq \emptyset$$

olacak biçimde enaz bir E_m kümesinin varolmasıdır.

Teorem 17.10.2 (Baire Yoğunluk Teoremi)**.** *(X, ρ) bir tam metrik uzay ve B_i, $\quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$ yoğun alt kümeler ailesi ise $\cap_{i=1}^{\infty} B_i$ arakesiti X içinde yoğundur.*

İSPAT: her hangi bir $p \in X$ öğesi ile bunun bir $B(p, r)$ yuvarsal komşuluğunu düşünelim. Göstereceğiz ki bu yuvar $\cap_{i=1}^{\infty} B_i$ ye ait enaz bir a öğesini içerir.

$B(p, r)$ açık bir küme ve B_1 yoğun olduğundan bir $a_1 \in B(p, r) \cap B_1$ öğesi seçilebilir. Öte yandan $(X, \mathscr{T}_\rho)$ düzenli olduğundan

$$\overline{B(a_1, r_1)} \subset B(p, r) \cap B_1$$

olacak biçimde a_1 öğesinin bir $B(a_1, r_1)$ yuvarsal komşuluğu vardır. Üstelik, bu komşuluğun r_1 yarıçapı 1 den küçük alınabilir.

$B(a_1, r_1)$ açık bir küme ve B_2 yoğun olduğundan bir $a_2 \in B(a_1, r_1) \cap B_2$ öğesi seçilebilir. Yeniden, metrel topolojinin düzenliliği

$$\overline{B(a_2, r_2)} \subset B(a_1, r_1) \cap B_2$$

olacak biçimde, a_2 öğesinin bir $B(a_2, r_2)$ yöresinin olmasını gerektirir. Tabii $r_2 < 1/2$ olacağı açıktır.

Bu düşünüş ardarda yinelenerek, i -nci adımda $(i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$

$$a_i \in B(a_i, r_i), r_i < 1/i$$

ve

$$\overline{B(a_i, r_i)} \subset B(a_{i-1}, r_{i-1}) \cap B_i$$

olacak biçimde bir a_i öğesi seçilebilir.

Şimdi bu yolla seçilen öğelerden oluşan (a_i) dizisini düşünelim. Eğer k bir doğal sayı ise $n, m > k$ olduğunda $a_n, a_m \in B(a_k, r_k)$ olur; dolayısıyla $d(a_n, a_m) < 2/k$ olcaktır.

Buradan (a_i) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. (X, ρ) bir tam uzay olduğundan bu dizinin X içinde bir limiti vardır; bu limite a diyelim. Öte yandan, her i doğal sayısı için $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ alt dizisi de aynı a limitine yakınsar. Bu alt dizinin bütün terimleri $\overline{B(a_i, r_i)}$ kümesince kapsanır. Bu küme kapalı olduğundan a limitini de içerecektir (bkz. `Teorem` 17.7.3). Bu ise

$$a \in \overline{B(a_i, r_i)} \subset B(a_{i-1}, r_{i-1}) \cap B_i$$

olması demektir. Her i doğal sayısı için bu özelliğin varlığı

$$a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$$

olmasını gerektirir, ki bu aradığımız sonuçtur.

Teorem 17.10.3 (Baire)**.** *Tam bir metrik uzay ikinci kategoridendir.*

İSPAT: X tam bir metrik uzay olsun. Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. hiç bir yerde yoğun olmayan alt-kümelerden oluşan bir (A_n) dizisi verilsin. Eğer

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \tag{17.56}$$

olsaydı

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n = \emptyset \tag{17.57}$$

olurdu. Oysa her n için A'_n yoğundur (bkz. `Önerme` 17.10.1). Öyleyse *Baire Yoğunluk Teoremi* uyarınca $\cap A'_n$ yoğun bir alt-kümedir. Bu ise, (17.57) ile çelişir. Bu çelişki olamayacağından (17.56) kabulümüz yanlıştır; yani X kümesi hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir sayıdasının bir bileşimine eşit olamaz.

17.10.1 Problemler

1. Salt topolojiye göre gerçel sayıların sonlu bir alt-kümesi hiç bir yerde yoğun değildir. Gösteriniz.
2. Hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin sonlu sayıdasının bileşimi de hiç bir yerde yoğun değildir. Gösteriniz.
3. Hiç bir yerde yoğun olmayan bir kümenin tümleyeni yoğun bir alt kümedir. Gösteriniz.
4. Yukarıdaki özeliğin karşıtı doğru mudur? Başka bir deyişle, *"yoğun bir alt-kümenin tümleyeni hiç bir yerde yoğun değildir"*, denebilir mi?

17.11 TAMLIK VE TIKIZLIK

Teorem 17.11.1. *Bir metrik uzayın tıkız olması için gerekli ve yeterli koşul içindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi olmasıdır.*

İSPAT: Önce koşulun gerekliğini görelim. $(X, \mathscr{T}_\rho)$ tıkız bir metrik uzay olsun ve X içinde bir (x_n) dizisi verilsin. Bu dizinin terimlerinin birbirlerinden farklı olduğu durumu düşünmek yetecektir. Çünkü, eğer dizinin birbirlerinden farklı terimleri sayısı sonlu ise, enaz bir terim sonsuz kez yineleniyor demektir; ki bu durumda, istenen yakınsak alt dizi olarak yinelenen terimlerden oluşan bir alt dizi seçilebilir. Eğer dizinin sonsuz çoklukta farklı terimi varsa, birbirlerine eşit olan terimlerden yalnız bir tanesini seçerek, terimleri birbirinden farklı sonsuz bir alt dizi seçebiliriz. Kolaylığı sağlamak için verilen (x_n) dizisinin, bu dizi olduğunu varsaymakta bir sakınca yoktur.

(x_n) dizisi sonsuz bir kümedir. X tıkız olduğundan, bu dizinin enaz bir yığılma noktası olcaktır (bkz. Teorem **??**); bu yığılma noktasına p diyelim. Yığılma noktası tanımı uyarınca, her k doğal sayısına karşılık, $B(p, 1/k)$ açık yuvarı içinde diziye ait bir $x_n^{(k)}$ öğesi seçilebilir. Böylece oluşturulacak $(x_n^{(k)})$ alt dizisinin p noktasına yakınsayacağı apaçıktır.

Koşulun yeterliğini göstermek için $(X, \mathscr{T}_d)$ metrik uzayındaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu varsayalım. Şimdi X kümesinin sonsuz bir A alt kümesi verilsin. A kümesinden, terimleri birbirinden farklı olan bir (x_n) dizisi seçebiliriz. Varsayımımız uyarınca, bu dizinin yakınsak bir alt dizisi olacaktır. Bu alt dizinin limitine p diyelim. `Teorem` 17.7.3 uyarınca, $p \in \bar{A}$ dır. Öte yandan, dizinin terimleri birbirlerinden farklı olduğu için, p nin her komşuluğu diziye ait kimi terimleri içerecektir; yani p noktası A nın bir yığılma noktasıdır. Sonsuz her A kümesi için bu özelik varolduğundan, `Önerme` 15.1.1 uyarınca, X metrik uzayı tıkızdır.

Teorem 17.11.2. *Bir metrik uzaydaki bir Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa, dizinin kendisi de yakınsaktır ve aynı limite sahiptir.*

İSPAT: (x_n) bir Cauchy dizisi dizisi ise, her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık

$$n, m \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde doğal bir N sayısı vardır. Eğer bu dizinin yakınsak alt dizisi $(x_n^{(k)})$ ve bu bnun limiti p ise

$$n \geq M \Rightarrow \rho(x_n^{(k)}, p) < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde doğal bir M sayısı vardır. N ile M sayılarından hangisi daha büyükse ona n_0 diyelim. $n \geq n_0$ olduğunda

$$\rho(x_n, p) \leq \rho(x_n, x_n^{(k)}) + \rho(x_n^{(k)}, p) < \epsilon$$

olacağından, $x_n \to p$ olduğu görülür.

Teorem 17.11.3. *Bir metrik uzayda tıkız alt kümeler tamdır.*

İSPAT: Metrik bir uzayda A tıkız bir alt küme ve (x_n) bu küme içinde bir Cauchy dizisi olsun. *Bolzano-Weierstrass* özelliğinden, bu dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır ve bunun limiti, p diyelim, A kümesine aittir. Oysa önceki teorem uyarınca $x_n \to p$ olacaktır. Demek ki A alt kümesindeki her Cauchy dizisi A içindeki bir limite yakınsıyor.

Sonuç 17.11.1. *Bir metrik uzayın sınırlı ve kapalı her alt kümesi tıkız ise bu uzay tamdır.*

İSPAT: Önceki teoremden, verilen varsayım altında sınırlı ve kapalı kümelerin tam olduğu sonucu çıkar. Bu ise uzayın tam olmasını gerektirir (bkz. `Önerme` 17.8.4).

Önerme 17.11.1. *Bir metrik uzayın büsbütün sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul, bu uzaydaki her dizinin bir Cauchy alt dizisinin var olmasıdır.*

İSPAT:

Gerekliği: X metrik uzayı büsbütün sınırlı olsun ve her hangi bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Bu dizinin bir Cauchy alt dizisi olduğunu göstereceğiz. Önce X kümesinin sonlu bir 1-örtüsünü düşünelim. Bu örtüye ait kümelerden enaz birisi dizinin sonsuz çoklukta öğelerini içerecektir. Bu öğeler

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots \tag{17.58}$$

olsun. Bu alt dizinin çapı 1 den küçüktür. Sonra X kümesinin sonlu bir $1/2$ örtüsünü düşünelim. Bu örtüye ait kümelerden enaz birisi (17.58) dizisine ait terimlerin sonsuz sayıdasını içerecektir. Bu öğeler

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots \tag{17.59}$$

olsun. Bu alt dizinin çapı $1/2$ en küçüktür. Bu düşünüşle, doğal her n sayısına karşılık, X kümesinin sonlu bir $1/n$ örtüsü var olacağından, bu örtüye ait enaz bir küme içinde sonsuz çoklukta

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots \tag{17.60}$$

öğeleri bulunur. Bu öğelerden oluşan alt dizinin çapı 1 den küçüktür. Böylece elde edilen $(17.58), (17.59), \ldots, (17.60), \ldots$ alt dizilerinden her birisi bir öncekinin bir alt-dizisi olmaktadır. Bu dizilerin birincisinden $x_1^{(1)}$, ikincisinden $x_2^{(2)}, \ldots$, k -ıncıdan $x_k^{(k)}$, ... öğesini seçerek, adına *köşegen dizisi* diyeceğimiz

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots \tag{17.61}$$

dizisini oluşturalım. Bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğu

$$n, m > n_0 \Rightarrow d(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) < \frac{1}{n_0} \tag{17.62}$$

eşitsizliğinden çıkar.

Yeterliği: X metrik uzayındaki her dizinin bir Cauchy alt dizisi var olsun. Eğer X büsbütün sınırlı olmasaydı yeterince küçük bir ϵ sayısı için, sonlu bir ϵ-örtüsü varolmazdı. Bu durumda her hangi bir $a_1 \in X$ öğesi seçelim ve $\epsilon/3$ yarıçaplı a_1 merkezli B_1 açık yuvarını düşünelim. Kabulümüz uyarınca B_1 yuvarı X kümesini örtemeyeceğinden bu yuvar dışında bir $a_2 \in X$ öğesi seçilebilir. Bu öğeyi merkez alan $\epsilon/3$ yarıçaplı B_2 yuvarını düşünelim. Gene $B_1 \cup B_2$ kümesi X uzayını örtemeyeceğinden bu bileşim dışında bir $a_3 \in X$ öğesi seçilebilir. Bu düşünce ardarda yinelenerek bir

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{17.63}$$

dizisini öyle seçebiliriz ki, bu dizinin her hangi iki öğesi arasındaki uzaklık $\epsilon/3$ den büyük olur. Dolayısıyla bu dizinin bir Cauchy alt dizisi var olamaz. Bu bir çelişkidir.

Önerme 17.11.2. *Bir metrik uzayın tıkız olması için gerekli ve yeterli koşul tam ve büsbütün sınırlı olmasıdır.*

Gerekliği: X tıkız bir metrik uzay ise, `Teorem` 17.11.1 uyarınca, içindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt dizi bir Cauchy dizisi olacağından, `Önerme` 17.11.1 uyarınca X uzayı büsbütün sınırlıdır. Tamlığı ise `Teorem` 17.11.3 çıkar.

Yeterliği: X metrik uzayı tam ve büsbütün sınırlı olsun. `Önerme` 17.11.1 uyarınca, X içindeki her dizinin bir Cauchy alt dizisi vardır. Uzay tam olduğundan, bu alt dizinin bir limiti olacaktır. Yani X içindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Artık uzayın tıkızlığı `Önerme` 17.11.1 den çıkar.

17.11.1 Problemler

1. Tıkız bir metrik uzaydan her hangi bir metrik uzaya tanımlı sürekli bir fonksiyonun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

2. Gerçel eksenin tıkız her alt kümesinin sınırlı ve kapalı olduğunu gösteriniz.

17.12 GERÇEL SAYILARIN TAMLIĞI

Gerçel sayıların *Dedekind kesimi* yöntemiyle nasıl kurulduğunu öğrenci Analiz derslerinden bilir. Metrik uzaylarda tamlama kavramı bilindikten sonra gerçel sayıları kurmak çok kolaylaşır. Rasyonel sayılar kümesi üzerinde salt (mutlak) metriği düşünelim. Bu uzayın tamlanmışını *Gerçel Sayılar* kümesi olarak tanımlayabiliriz. Gerçekten rasyonel sayılar kümesinin salt topolojiye göre gerçel sayılar kümesi içinde yoğun olduğunu biliyoruz (bkz. 4.1.2). Ancak $(\mathbb{Q}, |\ |)$ uzayının tamlanmışını $(\mathbb{R}, |\ |)$ metrik uzayı olduğunu göstermek için, buraya dek *Dedekind Kesimi* yöntemiyle kurulduğunu varsaydığımız $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin $|\ |$ salt metriğine göre tam bir uzay olduğunu göstermeliyiz. Bu işi yaparken gerçel sayıların sıralamasına değin özellikleri biliniyor varsayacağız.

Önerme 17.12.1. *Gerçel eksen üzerinde kapalı ve iç-içe olan aralıklardan oluşan bir dizinin arakesiti boş değildir.*

İSPAT: $I_n \supset I_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ olmak üzere $I_n = [a_n, b_n]$ kapalı aralıklarını düşünelim. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi boş değildir ve üstten b_1 ile sınırlıdır. *Gerçel* sayılardaki sıralama özelliğinden ([1], [22]), A kümesinin en küçük üst sınırı vardır.

$$x = \sup(A)$$

diyelim. Varsayımımız uyarınca her m, n doğal sayı çifti için

$$a_m \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m$$

olduğu apaçıktır. Öyleyse, her m için

$$a_m \leq x \leq b_m$$

dir : yani

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \{I_m : m \in \mathbb{N}\}$$

olur.

Önerme 17.12.2. *Gerçel eksen üzerinde kapalı ve iç-içe olan aralıklardan oluşan bir dizide aralıkların uzunluğu sıfıra yaklaşıyorsa, arakesitleri bir tek nokta içerir.*

İSPAT: $I_n, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ kapalı aralıklarının uzunluğu sıfıra yaklaşıyor demek , her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\mathfrak{s}(x, y) = |x - y|$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{s}(I_n) = \lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$$

olması demektir. x ile y öğeleri arakesit içinde olsunlar.

$$x \neq y \Rightarrow |x - y| = r > 0 \tag{17.64}$$

olacaktır. $\mathfrak{s}(I_n) \to 0$ olduğundan

$$n > n_0 \Rightarrow \mathfrak{s}(I_n) = b_n - a_n < \frac{1}{2}r \tag{17.65}$$

olacak biçimde doğal bir n_0 sayısı vardır. x ile y arakesit içinde olduğundan, her n için $x, y \in I_n$ dir. Öyleyse (17.65) den

$$n > n_0 \Rightarrow |x - y| < b_n - a_n < \frac{1}{2}r$$

olmalıdır, ki bu (17.64) ile çelişir. Demek ki $x = y$ olmak zorundadır.

Teorem 17.12.1 (Heine-Borel Teoremi)**.** *Salt topolojiye göre, gerçel eksenin sınırlı ve kapalı her aralığı tıkızdır.*

İSPAT: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere bir $F_1 = [a, b]$ kapalı aralığı ile bunun bir $\mathfrak{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ açık örtüsü verilsin. Açık aralıklar bir taban olduğundan (bkz. `Örnek` 4.1.6, açık örtüye ait her bir U_λ kümesi açık aralıkların bir bileşimi olarak yazılablir. Dolayısıyla, $\mathfrak{U}$ açık örtüsünden, açık aralıklardan oluşan bir

$$\mathscr{A} = \{(a_i, b_i) : i \in I\}$$

açık örtüsü elde edilir.

Önce $\mathscr{A}$ örtüsünden sonlu bir alt örtü seçilebileceğini gösterceğiz. $\mathscr{A}$ örtüsünden $[a, b]$ kapalı aralığını örten sonlu bir alt örtü seçilemiyorsa, aralığı tam ortasından eşit iki parçaya bölelim. Bu yarılardan enaz birisi $\mathscr{A}$ nın sonlu bir at örtüsüyle örtülemez; değilse, her iki yarı aralığın sonlu birer alt örtüsü olurdu. Bu da bütün aralığın sonlu bir alt örtüsü olması demektir. Şimdi $\mathscr{A}$ nın sonlu bir alt örtüsüyle örtülemeyen ilk yarı aralığı $F_2 = [a_2, b_2]$ ile gösterelim. Bu aralığı da tam ortasından iki eşit parçaya bölelim. Gene bu iki yarım aralıktan enaz birisi $\mathscr{A}$ nın sonlu bir alt örtüsüyle örtülemeyecektir. Örtülemeyen birini $F_3 = [a_3, b_3]$ ile gösterelim. Bu olguyu durmadan yinelersek, kapalı kümelerden oluşan azalan bir

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$$

kümeler dizisi elde edilir. $F_n = [a_n, b_n]$ kapalı aralığının uzunluğu $(b-a)/2^n$ dir. Dolayısıyla, bu kümeler dizisinin çapları sıfıra yakınsar; yani $\mathfrak{s}(F_n) \to 0$ dır. Öyleyse bu dizinin arakesitinin birtek öğesi vardır (bkz. `Önerme` 17.12.2). Bu öğeye p diyelim. Tabii $p \in [a, b]$ dir. $\mathscr{A}$ bu aralığın bir örtüsü olduğundan, $\mathscr{A}$ ya it bir (a_1, b_1) açık aralığı p yi içerir. $\epsilon = \min\{b_1 - p, p - a_1\}$ diyelim.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \mathfrak{s}(F_n) < \epsilon$$

olacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. Buradan

$$n \geq n_0 \Rightarrow F_n \subset (a_1, b_1)$$

çıkar. Bu ise F_n aralığının, $\mathscr{A}$ nın bir öğesi ile, dolayısıyla, sonlu bir alt örtüsüyle örtülebiliyor olması demektir. Bu bir çelişkidir. Öyleyse $\mathscr{A}$ nın $[a, b]$ yi örten sonlu bir alt örtüsü olmadığı varsayımımız yanlıştır, yani

$$[a, b] \subset \bigcup\{(a_k, b_k) : 1 \leq k \leq m\}$$

olacak biçimde $\mathscr{A}$ nın sonlu bir $\{(a_k, b_k) : 1 \leq k \leq m\}$ alt örtüsü vardır. Öte yandan, her bir (a_k, b_k) aralığı $\mathfrak{U}$ örtüsüne ait enaz bir U_k kümesi tarafından kapsanacaktır. Öyleyse

$$[a, b] \subset \bigcup\{U_k : 1 \leq k \leq m\}$$

olur. Böylece $\mathfrak{U}$ açık örtüsünden sonlu bir $\{U_k : 1 \leq k \leq m\}$ alt örtüsü seçilmiş olur. Artık $[a, b]$ nin tıkız olduğu tanımdan çıkar (bkz. `Tanım` **??**).

Teorem 17.12.2. *Salt metriğe göre gerçel sayılar kümesi tam bir uzaydır.*

İSPAT: `Sonuç` 17.11.1 uyarınca, gerçel eksenin sınırlı ve kapalı her altkümesinin tıkız olduğunu göstermek yetecektir. Gerçel eksenin sınırlı ve kapalı kapalı bir kümesi K olsun. Sınırlı olduğu için K yı kapsayan bir $[a, b]$ aralığı vardır (bkz. `Sonuç` 17.5.1). *Heine-Borel Teoremi* uyarınca, $[a, b]$ tıkızdır ve tıkız bir kümenin kapalı alt kümeleri de tıkız olduğundan K kümesi tıkızdır.

Tamlık kavramı topolojik değil, metrik bir özelliktir. Bunu göstermek için, aynı metrel topolojiyi üreten farklı iki metrik uzaydan birisinin tam olmasına karşın ötekinin tam olmayabileceğine bir örnek vermek yetecektir:

Örnek 17.12.1. ν, `Örnek` 17.37 te tanımlanan metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, \nu)$ uzayı tam değildir.

(n) doğal sayılar dizisinin $(\mathbb{R}, \nu)$ içinde bir *Cauchy* dizisi olduğunu biliyoruz (bkz.Örnek 17.7). Eğer bu uzay tam olsaydı (n) dizisinin $\mathscr{T}_\nu$ metrel topolojisine göre bir limiti olacaktı. Oysa ν ile $\mathfrak{s}$ denk; yani $\mathscr{T}_\nu = \mathscr{T}_\mathfrak{s}$ idi (bkz. `Örnek` 17.3.1). Bu durumda (n) dizisinin salt topolojiye göre de aynı limite yakınsaması gerekecekti, ki bu da (n) dizisinin salt metriğe göre *Cauchy* olmasını gerektirecekti; çünkü metrel topolojide yakınsak her dizi o metriğe göre bir *Cauchy* dizisidir. Oysa (n) doğal sayılar dizisinin $(\mathbb{R}, \mathfrak{s})$ uzayında bir Cauchy dizisi olmadığını biliyoruz. Bu çelişki olmayacağına göre; varsayımımız yanlıştır; yani $(\mathbb{R}, \nu)$ tam değildir.

Öte yandan $(\mathbb{R}, \mathfrak{s})$ uzayının tam olduğunu biliyoruz (bkz. `Teorem` 17.12.2). Demek ki, ν ile $\mathfrak{s}$ aynı metrel topolojiyi ürettikleri halde gerçel sayılar kümesi birisine göre tamdır, ama ötekine göre değildir.

Örnek 17.12.2. Gerçel eksenin her hangi bir açık aralığı, salt topolojiye göre, $\mathbb{R}$ ye topolojik eşyapılıdır.

(bkz. `Önerme` 8.3.4). Ama $\mathbb{R}$ nin tam olmasına karşın, açık bir aralık tam değildir. Örneğin, $(0,1)$ açık aralığındaki $(\frac{1}{n})$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Ancak bu dizinin $(0,1)$ içinde bir limiti yoktur.

17.12.1 Problemler

1. Cantor Arakesişme Özeliği'nde (bkz. `Teorem` 17.8.1), (F_n) kümelerinin kapalılık koşulunun kaldırılamayacağını gösteriniz.

   Yol gösterme:
   $$A_n = (0, \frac{1}{n}], n = 1, 2, 3, \ldots$$
   kümeler dizisinin arakesitinin boş olduğunu görünüz.

2. İrrasyonel sayıların gerçel sayılar kümesi içinde yoğun olduğunu gösteriniz.

3. $\mathbb{R}^n (n > 1)$ Öklid uzayının tam olduğunu gösteriniz.

17.13 BÜZGÜ DÖNÜŞÜMLERİ

Tanım 17.13.1. (X, ρ) bir metrik uzay olsun ve $T : X \to X$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\rho(T(x), T(y)) \leq r\rho(x, y)$$

olacak biçimde bir r $(0 \leq r < 1)$, gerçel sayısı varsa, T fonksiyonuna bir *büzgü dönüşümüdür (contraction)* denilir.

Örneğin, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayından kendi içine $f(x) = \frac{1}{2}x$ diye tanımlanan dönüşüm bir büzgü dönüşümüdür.

Önerme 17.13.1. *Her büzgü dönüşümü düzgün süreklidir.*

İSPAT: (X, ρ) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ fonksiyonu bir büzgü dönüşümü olsun. Her $p \in X$ noktasında f büzgü dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu göstermek için, *6.4.Tanım* 'ın sağlandığını göstermeliyiz. Verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, $\delta = \epsilon$ olan δ sayısını seçelim.

$$\rho(x, p) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(p)) \leq r\rho(x, p) \leq r\delta = r\epsilon < \epsilon$$

olduğunu düşünmek yetecektir.

Önerme 17.13.2. (X, ρ) *bir tam metrik uzay ve* $T : X \to X$ *fonksiyonu bir büzgü dönüşümü ise* X *uzayında* $T(p) = p$ *koşulunu sağlayan bir ve yalnızca bir* p *noktası vardır.*

İSPAT:

(X, ρ) tam bir uzay ve T bunun üzerinde bir büzgü dönüşümü olsun. Gösterimde basitliği sağlamak için $T(x) = Tx$ yazacağız. her hangi bir $x_0 \in X$ noktası seçelim. $T^n = T \circ T^{n-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
x_1 &= Tx_0 \\
x_2 &= Tx_1 = T^2x_0 \\
x_3 &= Tx_2 = T^3x_0 \\
&\vdots \\
x_n &= Tx_{n-1} = T^nx_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

biçiminde bir (x_n) dizisi kurabiliriz. Önce bu dizinin bir *Cauchy dizisi* olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\rho(x_m, x_n) &\leq \rho(T^m_{x_0}, T^n_{x_0}) \\
&= \rho(T^m_{x_0}, T^m_0 T^{n-m}_{x_0}) \\
&\leq r^m \rho(x_0, T^{n-m}_{x_0}) \\
&= r^m \rho(x_0, x_{n-m})) \\
&\leq r^m[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{n-m-1}, x_{n-m})] \\
&\leq r^m \rho(x_0, x_1)[1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-m-1}] \\
&\leq \frac{r^m}{1-r}\rho(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $0 \leq r < 1$ olduğundan, m yeterince büyültülerek, sağ yan istenildiğince küçültülebilir. Demek ki (x_n) bir Cauchy dizisidir. Öte yandan, X tam olduğundan $x_n \to p$ olan bir $p \in X$ vardır. Şimdi $T_p = p$ olduğunu göstereceğiz. Önceki önerme uyarınca T sürekli olduğundan dizisel süreklidir (bkz. `Teorem` 11.2.1) Öyleyse, `Teorem` 17.6.1 den

$$T_p = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p$$

çıkar.

Son olarak, p nin tekliğini gösterelim. Eğer $T_p = p$ ve $T_q = q$ olacak biçimde iki sabit nokta varolsaydı

$$\rho(p, q) = \rho(T_p, T_q) \leq r\rho(p, q)$$

olacaktı. Oysa $r < 1$ olduğundan, bu eşitsizlik $\rho(p, q) = 0$ olmasını gerektirir, ki bu da $p = q$ olmasına denktir.

Tanım 17.13.2. Yukarıdaki koşulu sağlayan p noktasına T dönüşümünün *sabit noktası* denilir.