TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,

ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

6 *Rasyonel Üslü İfadeler* 4

7 *Denklemler* 5

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,
ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

26 İntegral Alma Yöntemeleri

$f(x)$ fonkiyonunun belirsiz integrali türevleri $f(x)$ olan bütün fonkiyonlardır. Belirsiz integral

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C \qquad (C sabit) \tag{26.1}$$

simgesiyle gösterilir. Belirsiz denmesinin nedeni, $F(x)$ fonksiyonu türev kabul eden fonksiyonların sonsuz çoklukta oluşu ve hangisinden söz edildiğinin belli olmayışıdr. Sonsuz çoklukta olan belirsiz integraller birer sabit farkıyla birbirlerine eşittitler. Bu demektir ki, $F(x)$ ile $G(x)$ fonksiyonları $f(x)$ fonksiyonuun belirsiz integrali iseler

$$f(x) - G(x) = K \qquad (K sabit) \tag{26.2}$$

olur.

$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integraline *ilkel* (primitive), *ters türev* gibi adlar da verilir. Yalınlığı nedeniyle *ilkel* terimini tercih ediyouz. Ama öteki terimleri de, konuya açıklık getirmek gerektiğinde, eş anlamlı olarak kullanacağız.

(25.1) ifadesinde C sabiti sayısal her değeri alabilir. Dolayısıyla $F(x)$ fonksiyonunun sonsuzçoklukta belirsiz integrali vardır. Gerçel fonksiyonlarda çalışıyorsak, (25.1) belirsiz integralleri bütün düzlemi doldurur. Yani düzlemin her noktasından geçen bir ve yalnızca bir tane belirsiz integral vardır. Aynı fonksiyonun belirsiz integralleri kesişmezler.

27 Belirsiz İntegral

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihsiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

27.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri

Temel Formüller: Aşağıdki formüllerde u = u(x) fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin dve sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

1. $\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{u} \, du = ln|u| + C,$
3. $\int u dv = uv - \int v du$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
4. $\int \frac{1}{au+b} \, du = \frac{1}{a} ln|au+b| + C$

27.1 Değişken Değiştirme

Belirsiz integral verildiği biçemde bilinen integral formüllerinden hiç birisine benzemiyorsa, bazen uygun bir değişken değişimi ile bilinen formüllerden birisine dönüştürülebilir. Bu eylemin genel yöntemi şöyledir: $x = g(t)$ konumu yapılırsa, $dx = g'(t)dt$ olacağı düşünülürse,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \tag{27.1}$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı bilinen integral formüllerinden birisine benziyorsa, eşitliğin sağ yanı hesaplanabilir. Sonra asıl x değişkenine dönmek için $t = g^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu kullanmak gerekir. Dikkat edilirse, bu sonuç zincir theoremına benziyor.

(28.1) formülü ile belirli integral değerleri de bulunabilir:

Teorem 27.1. *$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, $g(t)$ fonksiyonu $\alpha \le g(t) \le \beta$ için sürekli ve $g'(t)$ türevi de sürekli ise $a = g(\alpha)$ ve $b = g(\beta)$ ise ya da buna denk olarak $\alpha = g^{-1}(a)$ ve $\beta = g^{-1}(b)$ ise,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(g(t))g'(t)dt \tag{27.2}$$

olur.

Belirli integral için var olan theoremlar, Teorem **??** ve Teorem **??** yardımıyla belirsiz integrallere kolayca uygulanabilir.

Aşağıdakiler değişken değiştirimini gösteren örneklerdir.

Örnek 27.2.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}, \qquad (t = x^2+1,\ du = 2xdx)\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \ln\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

Örnek 27.3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(2\ln x)}{x}dx &= \frac{1}{2}\int \sin t dt, \qquad (t = 2\ln x,\ dt = \frac{2}{x}dx,\ dx = \frac{x}{2}dt)\\ &= -\frac{1}{2}\cos t + C\\ &= -\frac{1}{2}\cos(2\ln x) + C\end{aligned}$$

Örnek 27.4.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x+1}\, e^x dx &= \int t^{1/2}dt, \qquad (t = e^x+1,\ dt = e^x dx,\ dx = e^{-x}dt)\\ &= \frac{2}{3}t^{3/2} + C\\ &= \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Örnek 27.5.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx &= \int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx\\ &= \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}dx\\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad [t = e^-x,\quad dt = -e^{-x}dx]\\ &= -\sin^{-1} t + C\\ &= -\sin^{-1}(e^{-x}) + C\end{aligned}$$

Örnek 27.6.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{5+4x+x^2}dx &= \int \frac{dx}{1+(x+2)^2}dx \\
&= \int \frac{du}{1+u^2}du, \qquad [u=(x+2), \quad du=dx] \\
&= \tan^{-1} u + C \\
&= \tan^{-1}(x+2)+C
\end{aligned}
$$

Örnek 27.7.

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx &= \int_1^2 \sin t dt, \qquad \left[t=\sqrt{x+1}, \quad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}\right] \\
&= 2\int_1^2 \sin t dt, \qquad [x=0 \Rightarrow t=1, \quad x=3 \Rightarrow t=2] \\
&= \ -2\cos u|_1^2 \\
&= 2(cos1-\cos 2)
\end{aligned}
$$

27.2 *Trigonometrik İntegraller*

Örnek 27.8.

$$
\begin{aligned}
\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx, \qquad (t=\cos x, \ \ dt=-\sin x dx) \\
&= -\int \frac{dt}{t}+C \\
&= -\ln|t|+C \\
&= -\ln|\cos x|+C \\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|+C \\
&= \ln|secx|+C
\end{aligned}
$$

Örnek 27.9.

$$
\begin{aligned}
\int \cot x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx, \qquad (t=\sin x, \ \ dt=\cos x dx) \\
&= \int \frac{dt}{t}+C \\
&= \ln|t|+C \\
&= \ln|\sin x|+C
\end{aligned}
$$

Örnek 27.10.

$t = (\sec x + \tan x)$, $dt = \sec x \tan x + \sec^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx, \\
&= \int \frac{sec^2 x + \sec x \tan x + sec^2 x}{sec x + \tan x} dx + C \\
&= \int \frac{dt}{t} \qquad = \ln|t| + C \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.11.

$t = (\csc x + \cot x)$, $dt = -(\csc x \cot x + \csc^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \csc x dx &= \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx \\
&= \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} + C \\
&= \int -\frac{dt}{t} \\
&= -\ln|t| + C \\
&= -\ln|\csc x + \cot x| + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.12.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x . \cos^n x dx &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\
&= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx \\
&= \int (t^n (1 - t^2)^k dt + C
\end{aligned}$$

çıkar. $(1-t^2)^k$ binoma göre açılabilir ve sonuç t ye göre bir polinom olur. Polinom terim terime integrallenebilir. Sonra istenirse $\sin x$'e dönüşüm yapılabilir. Bunu bir örnekle açıklamak daha kolay olacaktır.

Örnek 27.13.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x . \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x (\cos^2 x) \cos x dx \\
&= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx, \qquad (t = \sin x,\ dt = \cos x dx) \\
&= \int (t^2 - t^4) dt + C \\
&= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\
&= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.14.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x.\cos^8 x dx &= \int \sin^2 x(\cos^8 x)\sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^8 x \sin x dx, \qquad (t=\cos x,\ \ dt=-\sin x dx) \\
&= \int (1-t^2)t^8 dt + C \\
&= \int (t^8 - t^{10}) dt \\
&= \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{11}t^{11} + C \\
&= \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.15.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) dx, \qquad [\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C \\
&= \frac{1}{2}(x - \sin x.\cos x) + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.16.

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx, \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x) dx, \qquad [\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

27.3 Ters Trigonometrik Konumlar

Çok kullanışlı bazı ters trigonometrik konumlar (değişken değiştirimi),

$$x = a\sin\theta, \quad x = a\tan\theta, \quad x = a\sec\theta$$

fonksiyonları ile yapılır. Bunların karşıt fonksiyonları

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

dır.

Teorem 27.17.

İntegrali alınacak ifade $\sqrt{a^2-x^2}$, $(a>0)$ terimi içeriyorsa, $x = a\sin\theta$ ya da ona denk olarak $\theta = \sin^{-1}(\frac{x}{a})$ konumu yapılır.

Örnek 27.18.

a yarıçaplı bir disk içinde $b < a$ olmak üzere $[b, a]$ aralığına düşen daire kesmesinin A alanını bulunuz.

Çözüm: dairede simetriyi kullanırsak, sözkonusu alan I.bölgedeki alanın iki katı olacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A = \int_b^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_b^a (a^2 \cos\theta) d\theta, \qquad [x = a \sin\theta, \; dx = a \cos\theta d\theta] \\ &= a^2 (\theta + \sin\theta . \cos\theta) \Big|_{x=b}^{x=a} \\ &= a^2 \left(\sin^{-1} (\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \right) \Bigg|_{x=b}^{x=a} \\ &= \frac{pi}{2} a^2 - a^2 \sin^{-1} (\frac{b}{a}) - b\sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.19.

$$\begin{aligned} A = \int \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}} dx &= \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta} d\theta, \qquad [x = 3\tan\theta, \; dx = 3\sec^2\theta d\theta] \\ &= \int \sec\theta d\theta \\ &= \ln |sec\theta + \tan\theta| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{9 + x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C \\ &= \ln \left(\sqrt{9 + x^2} + x \right) + C_1, \qquad [C_1 = C - \ln 2] \end{aligned}$$

çıkar.

27.4 Çözümlü Problemler

1.
$$\int dx = x + C$$

2.
$$\int k \, dx = kx + C$$

3.
$$\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

4.
$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

5.
$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

6.
$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

7.
$$\int x^2(1-x^3)^5\,dx = -\frac{1}{18}x^3(x^3-2)(x^6-3x^3+3)(x^6-x^3+1)+C$$

8.
$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,dx = x sinh^{-1}(x) - \sqrt{x^2+1}+C$$

9.
$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2-\ln(x^2+1)\right)+C$$

10.
$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1}+C$$

11.
$$\int xe^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1)+C$$

12.
$$\int x(x-1)^6\,dx = \frac{1}{8}x^8-\frac{6}{7}x^7+\frac{5}{2}x^6-4x^5+\frac{15}{4}x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^2+C$$

13.
$$\int \frac{1}{5x+3}\,dx = \frac{1}{5}\ln(5x+3)+C$$

14.
$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$t=\sqrt{x}$ değişken değiştirimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
t=\sqrt{x} &= \\
dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt \\
x &= t^2 \Rightarrow x+1 = t^2+1 \\
x &= 4 \mapsto t=2 \\
x &= 9 \mapsto t=3
\end{aligned} \tag{27.3}$$

değişken değiştirimi yapılınca,

$$\begin{aligned}
\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx &= \int_2^3 \frac{t^2+1}{t^2+2t-3} \\
&= \int_2^3 \frac{2t^3+2t}{t^2+2t-3}dt \\
&= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{16t-12}{(t-1)(t+3)}\right)dt \\
&= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{1}{t-1}+\frac{15}{t+3}\right)dt \\
&= t^2-4t+\ln|t-1|+15\ln|t+3||_2^3 \\
&= [9-12+\ln 2+15\ln 6]-[4-8+0+15\ln 5] \\
&= \ln 2+15\ln 6+15\ln 3-15\ln 5+1 \\
&= \ln 2+15\ln 6-15\ln 5+1
\end{aligned}$$

İstenirse, 5. eşitlikten sonra t değpişkeninden tekrar x değişkenine dönüşüm yapılabilir

$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\, dx = x - 4\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}+3||_4^9$$
$$= \ln 2 + 15\ln 6 - 15\ln 5 + 1$$

bulunur.

15.
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu problemi çözmek için önce (28.4) eşitsizliğinin varlığını göreceğiz.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\, dx \le \lim_{n\to\infty} \lim \int_0^{2\pi} \frac{1}{x^2+n^2} \qquad = 0 \tag{27.4}$$

Sonra Teorem **??**-10.'yu kullanacağız:

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\, dx\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\, dx \tag{27.5}$$
$$\le \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2}\, dx \tag{27.6}$$
$$= \frac{2\pi}{n^2} \tag{27.7}$$

Bu eşitsizliklerden limite geçersek,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\, dx \le \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n^2} = 0$$

çıkar.

16.
$$\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+3x-5)d(x^2+3x-5)$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2+3x-5) + C$$

17.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x^2-x)}}\,dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx, \quad t=(x-\frac{1}{2}) \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-t^2}}\,dt \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{t}{5/2}\right)+e \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right)+e
\end{aligned}$$

18.
$$\int_0^1 x\ln(x+3)\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$t=\ln(x+3)$ konumu yapılırsa $dv = x\,dx$, $dt=\frac{dx}{x+3}$, $v=\frac{x^2}{2}$ olur. Bunlar kısmi integral formülünde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int x\ln(x+3)\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+3}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-3x+9\ln(x+3)\right)+C
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 x\ln(x+3)\,dx = \frac{5}{4}-\ln 4+\frac{9}{2}\ln 3$$

bulunur.

19.
$$\int e^{x/2}\sin(ax)\,dx = \frac{1}{(a^2+\frac{1}{4})}\,e^{x/2}\left(\frac{\sin(ax)}{2}-a\cos(ax)\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

20.
$$\int \frac{1}{(3\cos x+5)}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\frac{x}{2}}{2}\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

21.
$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

22.
$$\int x \sin x \, dx = \sin x x \cos x + C$$

23.
$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x} + C$$

24.
$$\int \csc(3x)\sec(3x) \, dx = \frac{1}{3}\left(\ln(sin(3x)) - \ln(\cos(3x))\right) + C$$

25.
$$\int \frac{1}{1+x^3} \, dx = \frac{1}{6}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{3}\ln\left(x+1\right) + \frac{tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

26.
$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} \, dx = -2\sqrt{4-x} + C$$

27.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} \, dx = -\frac{2x}{\sqrt{x^3}} + C$$

28.
$$\int 2\sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

29.
$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x} \, dx = \tan^{-1}(e^x)} + C$$

Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \frac{1}{(au+b)^2} \, du = -\frac{1}{u+a} + C, \quad (au + b \neq 0)$
2. $\int (u+b)^n \, du = \frac{1}{n+1}(u+a)^{n+1} + C,$
3. $\int u(u+a)^n \, du = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(u+a)^{n+1}\left((n+1)u - a\right) + C,$
4. $\int \frac{1}{1+u^2} \, du = tan^{-1} u + C$
5. $\int \frac{1}{a^2+u^2} \, du = \frac{1}{a} tan^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\frac{1}{a} cot^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
6. $\int \frac{1}{u^2-a^2} \, du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
7. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} tan^{-1}(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}) + C$
8. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{2a} ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} tan^{-1}\frac{ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

Köklü İfadelerin İntegralleri:

1. $\int \sqrt{x-a} \, dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} + C$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} \, dx = 2\sqrt{x \pm a} + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} \, dx = -2\sqrt{a-x} + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \, du = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\cos^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}} \, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C$

7. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}\, du = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+\sqrt{a^2 \pm u^2}} \right| + C$

8. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, dx = \frac{1}{a} \cos^{-1}(\frac{u}{a}) = \frac{1}{a} \sec^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

9. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$

10. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

2. $\int \cos u\, du = \sin u + C$

3. $\int \tan u\, du = \ln|\sec u| + C = \ln|\cos u| + C$

4. $\int \cot u\, du = \ln|\sin u| + C$

5. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C = \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$

6. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

7. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

8. $\int \csc u \tan u\, du = \sec u + C$

9. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

Hiperbolik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sinh u\, du = \cosh u + C$

2. $\int \cosh u\, du = \sin u + C$

3. $\int \tanh u\, du = \ln|\cosh u| + C$

4. $\int \coth u\, du = \ln|\sinh u| + C$

5. $\int sech(u)\, du = \tanh^{-1}(\sinh u) + C$

6. $\int csch(u)\, du = -\coth^{-1}(\cosh u) + C$

7. $\int sech^2(u)\, du = \tanh u + C$

8. $\int csch^2(u)\, du = -\coth u + C$

9. $\int sech(u) \tanh u\, du = -sech(u) + C$

10. $\int csch(u) \coth u\, du = -csch(u) + C$

Üstel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int e^{ku}\, du = \frac{1}{k} e^{ku} + C$

2. $\int a^u\, du = \frac{1}{\ln a} a^u + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$

3. $\int u a^{ku}\, du = \frac{1}{k \ln a} a^{ku} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$

4. $\int u^2 a^{ku}\, du = a^{ku} \left(\frac{u^2}{k} - \frac{2u}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right) + C$

5. $\int \frac{e^{kx}}{x}\, dx = \ln u + \sum_{n=1}^{infty} \frac{(kx)^n}{n.n!}$

6. $\int e^{au} \sin bu\, du = \frac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu}{)} a^2 + b^2 + C$

7. $\int e^{au} \cos bu\, du = \frac{e^{au}(a \cos bu - b \sin bu)}{a^2+b^2} + C$

Logaritmik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \ln(kx)\, dx = x \ln(kx) - x + C$
2. $\int \ln(ax+b)\, dx = x \ln(ax+b) - x + \frac{b}{a} \ln(ax+b) + C$
3. $\int (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$
4. $\int (\ln(kx))^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln(kx))^{n-1}\, dx + C$
5. $\int \frac{1}{\ln x}\, dx = \ln|\ln x| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n.n!} + C$
6. $\int x^m . \ln x\, dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \qquad (m \neq 1)$
7. $\int \frac{1}{x[\ln(x)]^n}\, dx = \frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$
8. $\int \ln(x^2+a^2)\, dx = x \ln(x^2+a^2) - 2x + 2a \tan^{-1}(\frac{x}{a}) + C$
9. $\int \sin(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$
10. $\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$

27.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri

27.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse

$y = \ln u \Longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln|u(x)| + C$$

yazabiliriz. Bazen uygun değişken değiştirimi ile integrali alınacak fonksiyon bu biçeme sokulabilir.

Örnekler:

1. $y = \ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

yazabiliriz.

2. İntegrali alınacak fonksiyon $\frac{1}{x-a}$ biçiminde ise, onun $\ln|x-a| + C$ foksiyonunun türevi olduğunu biliyoruz.

$$\int \frac{1}{x-2} dx \tag{27.8}$$

integralini hesaplamak için $w = x-2,\ dw = dx$ konumu yapılısa,

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{1}{w} dw = \ln|w| + C = \ln|x-2| + C$$

bulunur.

3. Paydanın türevi paya eşitse, bir değişken değiştirimi ifadeyi $\frac{dw}{u}$ biçimine dönüştürür.

$$\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr$$

integralini hesaplamak için

$$w = r^3-3r^2+1, \qquad dw = (3r^2-6r)dr = 3(r^2-2r)dr$$

konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{w}dw \\ &= \frac{1}{3}\ln|w|+C \\ &= \frac{1}{3}\ln|r^3-3r^2+1|+C\end{aligned}$$

bulunur.

4. Çoğunlukla payda'nın türevi paya eşit olmaz. Bu durumlarda da değişken değiştirimi bazen işe yarayabilir.

$$\int \frac{s+2}{s+3}ds$$

integralini hesaplamak için $w = s-3, \quad dw = ds$ konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{s+2}{s+3}ds = \int \frac{w+5}{w}dw &= \int \left(1+\frac{5}{w}\right)dw \\ &= w+5\ln|w|+C \\ &= s-3+5\ln|s-3|+C\end{aligned}$$

bulunur.

27.5.2 Basit Kesirlere ayırma

Teorem 27.20. *$\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu için, payın derecesi paydadınkinden küçük ve paydanın baş katsayısı 1 olsun. Payda*

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

gibi doğrusal çarpanlarına ayrılabiliyorsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_1}{x-a_2}+\dots+\frac{A_1}{x-a_n} \tag{27.9}$$

biçeminde yazılabilir.

Bu teoremin formal ispatını vermeye gerek kalmadan, integral hesabında gerekli olacağı için $A_1, A_2, \dots, A_n$ katsayılarının hesaplanışını göstereceğiz. O eylem ispat yerine geçecektir. Bunun için yapılacak iş basittir. (28.9) ifadesinin sağ yanındaki terimlerin paydalarını eşitleyip ortak payda altında toplarız. Sağ tarafın payına gelecek olan polinoma $S(x)$ dersek, (28.9) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} \tag{27.10}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan $P(x) \equiv S(x)$ olması gerektiği çıkar. Bu özdeşlikte eşit dereceli terimlerin katsayılarını eşitleyerek istenen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ katsayıları hesaplanabilir.

Katsayıları kolay hesaplamaya yarayan başka pratik bir yöntem de şöyledir: (28.9) eşitliğinin iki yanını herhangi bir $(x - a_j)$ ile çarpıp $x \to a_j$ iken limiti hesaplayalım: Her $(1 \le j \le n)$ için,

$$A_j = \lim_{x \to a_j} (x - a_j)\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a_j)}{(a_j - a_1)(a_j - a_2)\ldots(a_j - a_n)} \tag{27.11}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte paydası $(x - a_j)$ olan terime karşılık gelen A_j katsayısı bulunmuş olur. Her $(1 \le j \le n)$ için bu eylem yapılırsa, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ katsayıları hesaplanmış olur. Bu işleme dikkat edersek, yapılan iş,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)} \tag{27.12}$$

eşitliğinin sağ yanında paydadaki $(x - a_j)$ çarpanını yok sayıp geride kalan ifadede x yerine a_j koymaktan ibarettir. Katsayıların hesaplanmasında bu oldukça kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

Örnekler: Bazen paydayı çarpanlarına ayırmak integral işlemini basitleştirir.

5.

$$\int \frac{x+4}{x^2 - 5x + 6}dx \tag{27.13}$$

integralini hesplamak için, ifadeyi basit kesirlerine ayıracağız.

$$\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} \tag{27.14}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \tag{27.15}$$

$$= \frac{Ax - 3A + Bx - 2B}{(x-2)(x-3)} \tag{27.16}$$

$$\Longrightarrow (A+B) = 1, \qquad -3A - 2B = 4 \tag{27.17}$$

$$\Longrightarrow a = -6, \quad B = 7 \tag{27.18}$$

olur. Buradan,

$$\int \frac{x+4}{x^2 - 5x + 6}dx = -6\int \frac{1}{x-2}dx + 7\int \frac{1}{x-3}dx \tag{27.19}$$

$$= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C \tag{27.20}$$

çıkar.

6.

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)}dx = \frac{A}{x-2} + \frac{A}{x+2} + \frac{A}{x-5}$$
$$= \frac{104}{84(x-5)} + \frac{35}{x-2} + \frac{15}{x+2}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)}dx &= \int \frac{104}{84(x-5)} + \int \frac{35}{x-2} + \int \frac{15}{x+2}\\ &= \frac{1}{84}(104\ln|x-5| - 35\ln|x-2| + 15\ln|x+2| + C\end{aligned}$$

bulunur.

7. Payın derecesi paydanınkinden büyükse, önce bölme işlemi yapılır, sonra yukarıdaki yönteme başvurulur:

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx$$

integralini hesaplamak için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^3-4}{x^2-x-2} = (x+2) + \frac{9x+2}{x^2-x-2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx &= \int (x+2)dx + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx\\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx\end{aligned}$$

yazılabilir. Sağdaki integrali hesaplamak için,

$$\begin{aligned}\frac{9x+2}{x^2-x-2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}\\ &\Longrightarrow A = \frac{7}{3},\ B = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx &= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C_2\\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + +\frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C, \qquad (C = C_1 + C_2)\end{aligned}$$

bulunur.

8.

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx = \int \left(1 + \frac{x+2}{x^3-x}\right)dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x}dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yandaki integral içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^3-x} &= \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}\\ &= \frac{A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)}\\ &\Longrightarrow \begin{cases} A+B+C=0\\ B-C=1\\ -A=2\end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = -2$, $B = 3/2$, $C = 1/2$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx &= x - 2\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C\end{aligned}$$

çıkar.

9. Paydanın bir yada iki dereceli bir çarpanı m kez tekrar ediyorsa, onu kesirlerine ayırırken söz konusu çarpan için, dereceleri 1 den m ye kadar değişen terimler eklenir.

Örnek 27.21.

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2}$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A + B + & = 0 \\ -2A - B + C & = 0 \\ A & = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2} &= \int \frac{1}{x}dx \ - \int \frac{1}{x-1}dx \ + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

çıkar.

27.5.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa

Payda'da $ax^2 + bx + c$ gibi ikinci dereceden bir çarpan var ve $b^2 - 4ac < 0$ ise o çarpana ait gerçel kök yoktur. Basit kesirlere ayırırken ona ait terimi $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ biçiminde yazarız. Tabii, aynı düşünceyi

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx, \quad \int \frac{x}{x^2+a^2}dx, \quad \int \frac{1}{x^2-a^2}dx, \quad \int \frac{x}{x^2-a^2}dx$$

tipi integrallerin hepsine uygulayabiliriz. Sonuçlar daima,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan -1\left(\frac{x}{a}\right) + C \tag{27.21}$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C \tag{27.22}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C \tag{27.23}$$

$$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C \tag{27.24}$$

formüllerine indirgenebilir.

Örnekler

1.

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3+x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx = \int \left(\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} &= \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\
&= \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x-1)(x+1)} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B &= 1 \\ C &= 3 \\ A &= 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=2,\ B=-1,\ C=3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1} + 3\int \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\tan^{-1}x + C
\end{aligned}$$

çıkar.

2.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \int \left(\frac{1}{(x-a)(x+a)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a)} + \frac{B}{x+a} \\
&= \frac{Ax+Aa+Bx-Ba}{(x^2-a^2} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B &= 0 \\ Aa-Ba &= 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/(2a),\ B = -1/(2a)$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}dx \\
&= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C \\
&= \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

3. Bazen uygun bir değişken değiştirimi ile payda'nın türevi paya eşitlenebilir.

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5 44x^3+x}dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx = \int \left(\frac{x^2+2}{x((2x^2+1)(2x^2+1)^2} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2} \\
&= \frac{A(4x^2+4x+1)+B(2x^4+x^2)+C(2x^3+x)+Dx^2+Ex}{4x^5+4x^3+x} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 4A+2B & =0 \\ 2C & 0 \\ 4A+B+D & =1 \\ A & =2 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=2$, $B=-4$, $C=0$ $D=-3$, $E=0$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx &= 2\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{xdx}{2x^2+1} - 3\int \frac{xdx}{(2x^2+1)^2} \\
&= 2\ln|x| - \int \frac{du}{u} - \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2}, \qquad (u = 2x^2+1) \\
&= 2\ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C \\
&= 2\ln\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right) + \frac{3}{4}\,\frac{1}{2x^2+1} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

4.

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \\
&= \frac{A(x^2-x+1)+B(x^2+x)+C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B & =0 \\ -A+B+C & =0 \\ A+C & =1 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/3,\ B = -1/3,\ C = 2/3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

çıkar.

27.6 Karma problemler

1. Aşağıdaki integral formüllerini doğruluğunu sağlayınız.

Örnek 27.22.

$$\int \frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Örnek 27.23.

$$\int \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}C$$

Örnek 27.24.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

Örnek 27.25.

$$\int \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2\tan x se^2 x + C$$

Örnek 27.26.

$$\int x(a^x)dx = \frac{a^x(\ln a - 1)}{\ln^2 a} + C$$

Örnek 27.27.

$$\int x(\sinh x)dx = x(\cosh x) + \sinh x + C$$

Örnek 27.28.

$$\int \sin\sqrt{x}dx = 2(\sin\sqrt{x} - 2\cos\sqrt{x} + C$$

Örnek 27.29.

$$\int \sin^{-1}(\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}(\sqrt{-(x-1)x} + \sin^{-1}(\sqrt{x}) + C$$

Örnek 27.30.

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x})dx = (x+1)tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$$

Örnek 27.31.

$$\int x\ln x = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

2. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

Örnek 27.32.

$$\int \frac{x^2-5x-9}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \left\{\frac{1}{6}(-13\ln(x-1) + 9\ln(x+1) + 10\ln(x+2))\right\} + C$$

Örnek 27.33.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}\\ &= \frac{A(x+2)^2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1}\\ &\Longrightarrow \begin{cases} A & = 4\\ A+B & = 3\\ B = & = 3-A = 3-4 = -1\\ C & = 3\end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 4$, $B = -1$, $C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2}\\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3\int (x+2)^{-2}dx + C\\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C\\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.34.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}\\
&= \frac{A(x+2)^2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} A & = 4\\ A+B & = 3\\ B = & = 3-A = 3-4 = -1\\ C & = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 4,\ B = -1,\ C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2}\\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3\int (x+2)^{-2}dx + C\\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C\\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.35.

$$\begin{aligned}
\int (1-3x)^5 dx &\Longrightarrow t = 1-3x,\ dt = 3dx\\
&= \int t^5 (\frac{-1}{3} dt\\
&= \frac{-1}{3}\frac{1}{6}t^6\\
&= \frac{-1}{18}(1-3x)^6 + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.36.

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x+4)^3}{x}dx &\Longrightarrow t=\ln x+4,\ dt=\frac{1}{x}dx\\ &=\int t^3 dt\\ &=\frac{1}{4}t^4\\ &=\frac{1}{4}(\ln x+4)^4+C\end{aligned}$$

Örnek 27.37.

$$\begin{aligned}\int a^x dx &\Longrightarrow t=a^x \Rightarrow t=e^{x\ln a},\\ &=\int e^{x\ln a}dx=\frac{1}{\ln a}e^{x\ln a}+C\\ &=\frac{1}{\ln a}a^x+C\end{aligned}$$

Örnek 27.38.

$$\begin{aligned}\int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &\Longrightarrow x=t^2 \Rightarrow dx=2t\,dt,\\ &=2\int a^t dt\\ &=\frac{2}{\ln a}a^t+C\\ &=\frac{2}{\ln a}a^{\sqrt{x}}+C\end{aligned}$$

Örnek 27.39.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{1+x^8}dx &\Longrightarrow t=x^4 \Rightarrow dt=4x^3dt,\\ &=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2}dt\\ &=\frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)+C\end{aligned}$$

Örnek 27.40.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx &\Longrightarrow \int \frac{du}{u}=\ln|u|+C\\ &=\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}dx\\ &=\ln|\sin x+\cos x|+C\end{aligned}$$

Örnek 27.41.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\cos^5 x}\, \sin x dx &\Longrightarrow t = \cos x,\ dt = -\sin x dx \\
&= -\int \sqrt{t^5} dt \\
&= -\int t^{5/2} dt \\
&= -\frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C \\
&= -\frac{2}{7} (\cos^{\frac{7}{2}} x + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.42.

$$\begin{aligned}
\int x^3 \sqrt{x-3}\, dx &\Longrightarrow t^2 = x-3,\ 2t dt = dx,\ x = t^2+3 \\
&= \int (t^2+3)^3 . t . (2t dt), \qquad [(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3] \\
&= 2\int (t^8 + 9t^6 + 27t^4 + 27t^2) dt \\
&= \frac{2}{9} t^9 + \frac{18}{7} t^7 + \frac{54}{5} t^5 + \frac{54}{3} t^3 + C \\
&= \frac{2}{9}(x-3)^{\frac{9}{2}} + \frac{18}{7}(x-3)^{\frac{7}{2}} + \frac{54}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 18(x-3)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.43.

$ekok\{4,\ 5\} = 20 \Rightarrow t^{20} = x+1,\ 20t^{19} dt = dx,\ x = t^{20} - 1$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3 + \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}}\, dx &= \int \frac{3 + \sqrt[4]{t^{20}}}{\sqrt[5]{t^{20}}} (20t^{19} dt \\
&= \int \frac{3+t^5}{t^4} (20t^{19}) dt \\
&= 20 \int \left(t^{20} + \frac{3t^{19}}{t^4} \right) dt \\
&= \frac{20}{21} t^{21} + \frac{15}{4} t^{16} + C \\
&= \frac{20}{21}(x+1)^{\frac{21}{20}} + \frac{15}{4}(x+1)^{\frac{4}{5}} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.44.

$u = x,\ dv = e^x dx,\ du = dx,\ v = e^x,\ \int u\, dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int xe^x\, dx &= xe^x - \int e^x\, dx \\
&= xe^x - e^x + C \\
&= e^x (x-1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.45.

$u = x^2,\ dv = e^x dx,\ du = 2x dx,\ v = e^x,\ \int u\, dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

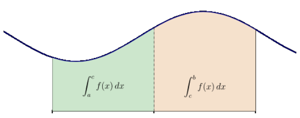
$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\, dx &= x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx \\ &= x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.46.

$y = f(x),\ Ox,\ x = a,\ x = b$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan,

$$\int_a^b f(x)dx \tag{27.25}$$

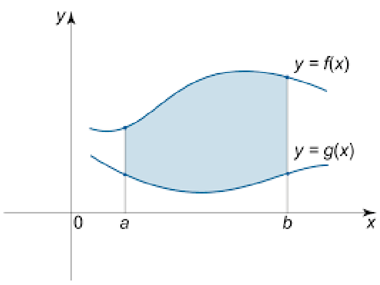


Şekil 27.1: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması

belirli integrline eşittir.

Örnek 27.47.

$y = 2x$ eğrsi, Ox doğrusu, $x = 1$ ve $x = 2$ doğrularının sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.



Şekil 27.2: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması

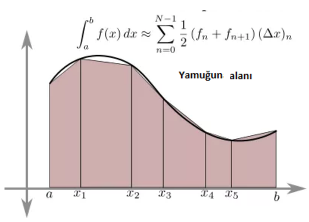
$$A = \int_1^2 2x dx \tag{27.26}$$

$$= x^2\Big|_1^2 \tag{27.27}$$

$$= 2^2 - 1 = 3 \tag{27.28}$$

$$A = \frac{2+4}{2} \times 1 = 2 \tag{27.29}$$

Aynı sonucu, Şekil 28.5'deki yamuğun alan formülü ile de bulabiliriz. Anımsayacağınız gibi, yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yarısının yüksekliği ile çarpımına eşittir.

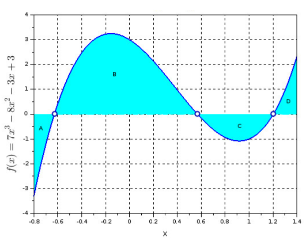


55

Şekil 27.3: Yamuğun Alanı

Bazı aralıklarda $y = f(x)$ fonksiyonu negatif değerler alabilir. O zaman (28.26) Riemann toplamındaki negatif y_i ler için gikdörtgen alanları negatif olur. Oysa, düzlemsel alanın değeri daima pozitif olmalıdır.Negatif alan tanımmlı değildir. O nedenle, negatif alanları pozitif yapmalıyız. Bunu yapmak için fonksiyonun negatif değerler aldığı aralıkları saptar ve onlar için bulduğumuz belirli integrali pozitif yaparız. Bu eylemi pratik bir formüle bağlamak da mümkündür:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \tag{27.30}$$

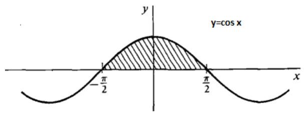


Şekil 27.4: Negatif Alanlar

Örnek 27.48.

eğrisi altında ve $[\frac{1}{2}, 1]$ alağı üzerinde kalan alanı bulunuz. Verilen bölgede $y = \cos x$ fonksiyonu pozitif değerler aldığı için, istenen alan,

$$A = \int_{0.5}^{1} \cos x dx = \sin x|_{0.5}^{1} \quad (27.31)$$
$$= \sin(1) - \sin(0.5) \quad (27.32)$$
$$= 0.841 - 0.479 \quad (27.33)$$
$$= 0.362 \quad (27.34)$$



Şekil 27.5: $y = \cos x$ altındaki Alan

olur.

Örnek 27.49.

Yarıçapı $r = 3$ olan dairenin üst yarı düzlemdeki alanını bulunuz.

$$\frac{A}{2} = \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int 3\sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t dt, \quad [x = 3\sin t, \quad dx = 3\cos t dt\,]$$
$$= 9\int_0^{\pi/2} cos^2 t dt$$
$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\; dt$$
$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\int \cos 2t\; dt$$
$$= \frac{9}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{9}{2}\sin -1(1)$$
$$= \frac{9}{2}\frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{9\pi}{4}$$

olur.

Uyarı 27.50. *Aşağıdaki integral formülü kullanılırsa aynı sonuç elde edilir.*

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$$

Örnek 27.51.

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 = 9$$

Örnek 27.52.

$$\int_0^2 (4x^3 - 9x^2) dx = 4\int_0^2 x^3 dx - 9\int_0^2 x^2 dx$$
$$= (x^4 - 3x^3)|_0^2$$
$$= 2^4 - 3(2)^3$$
$$= 1624 = -8$$

Örnek 27.53.

$$\int_{-2}^{0}(2x-1)^2dx=\frac{1}{8}(2x-1)^4\bigg|_{-2}^{0}=-78$$

Örnek 27.54.

$y=x^2-4x+5$ ile $y=2x-3$ eğrileri arqasında kalan alanı bulunuz.

$$\begin{aligned}\int_{1}^{3}[(x^2-4x+5)]dx&=\int_{2}^{4}(-x^2-4x+5)dx\\&=\frac{x^3}{3}-2x^2-5x)\bigg|_{1}^{3}\qquad\qquad =(\frac{64}{3}+48-32)\\&=\frac{64}{3}\end{aligned}$$

Örnek 27.55.

$$\int_{0}^{2}2^xdx=\frac{2^x}{\ln 2}\bigg|_{0}^{3}=\frac{2^3}{\ln 2}=\frac{8}{\ln 2}$$

Örnek 27.56.

$$\int_{0}^{2\sqrt{2}}(x^2+1)dx=\frac{x^3}{3}+x\bigg|_{0}^{2\sqrt{2}}=\frac{22\sqrt{2}}{3}$$

Örnek 27.57.

$y=1-x^2$ parabolü ile $y=x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})}(1-x-x^2)dx=5\frac{5}{6}=1.86339$$

Örnek 27.58.

$y=16x-10x^2+x^3$ ile $y=-16x+10x^2-x^3$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{0}^{2}(32x-20x^2+x^3)dx+\int_{2}^{8}(32x-20x^2+x^3)dx=\frac{1136}{3}=378.667$$

Örnek 27.59.

$y=|x|$ ile $y=6-x^2$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{-3}^{3}(6-x^2+|x|)dx=27$$

Örnek 27.60.

$[0,2\pi]$ aralığı üzerinde $y=\sin x$ ile $y=\cos x$ eğrileri arasında ve [kalan alanı bulunuz.

$$\int_{0}^{\pi/4}(\cos-\sin x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi}(-\cos+\sin x)dx=2\sqrt{2}\approx 2.82843$$

27.7 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{3dx}{3x-4}$ 2. $\int \frac{dx}{3-5x}$
3. $\int \frac{xdx}{\pi x-3}$ 4. $\int \frac{x^2dx}{x-3}$
5. $\int \frac{dx}{x^2-4}$ 6. $\int \frac{dx}{3-x^2}$
7. $\int \frac{x^2}{x^2+2x-2}$ 8. $\int \frac{xdx}{3-x^2}$
9. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ 10. $\int \frac{1}{a^2-b^2x^2}dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{x-3}{x^2+x}dx$ 2. $\int \frac{1}{9x+x^3}dx$
3. $\int \frac{1}{9x^2-6x+2}dx$ 4. $\int \frac{x}{2+6x+9x^2}dx$
5. $\int \frac{1+x^2}{9x^2-6x}$ 6. $\int \frac{1+x^3}{x^2+7x+12}dx$
7. $\int \frac{x^3}{x^3-a^3}$ 8. $\int \frac{dx}{2x+2x^2+x^3}$
9. $\int \frac{1}{x^4-3x^3}$ 10. $\int \frac{x}{1-x+x^2}dx$

27.8 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa

Bir fonksiyonun integralini almak demek, o fonsiyonu türev kabul eden fonksiyonları bulmak demektir. Öyleyse, işin esası (f, f') (fonkion-türevi) eşleşmesidir. Bir fonksiyonun sonsuz çokluktaki belirsiz integralleri (ilkelleri) birer sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğuna göre, sabiti ihmal ederek(f, f') eşleşmesini bire bir imiş gibi görebiliriz.

Calculu'ta türev alma kuralları integral alma kurallarından daha yeteneklidir. Türevi olan her fonksiyonun türevini bulmamızı sağlar. Ama bu kesimde göreceğimiz gibi, integral alma kurallarımız çok yetenekli değildir. Bir fonksiyonun integralinin varlığını biliyor olsak bile, bazen o integrali bulamayabiliriz. Bunun tipik örneği $\int e^{x^2}dx$ integralidir. integrand sürekli olduğu için, integralin varlığını biliyoruz, ama e^{x^2} fonksiyonunu türev olarak kabul eden fonksiyonu bilmiyoruz.

İntegral alma eyleminde genel sayılacak tek kural, integrandı türev kabul eden fonksiyonun bulunması eylemidir. Bu eylem sonuç olarak (f, f') eşleşmesine indiegenir. Bütün integral alma yöntemleri sonunda (f, f') eşleşmesini kullanır. O nedenle ne kadar çok fonksiyonun türevini biliyorsak, ters işlemi, yani türevden ilkel fonksiyonu bulma eylemini de o kadar biliyor oluruz. Bunun için türev alma kuralları bize çok bilgi veriyor. Sabitler, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, ters fonksiyonlar gibi bir sınıflandırmayla pratikte çok kullanılan fonksiyonların türevlerini listeleyebiliyoruz. Oradan ters dönüşüm yaparak (f, f') eşleşmesine dönebiliriz.

Genel geçerliği olan yöntem olmadığı için, fonksiyonları alt sınıflara ayırıp, her sınıf için geçerli olan integral alma yöntemlerini ortaya koyacağız. Yukarıda da söylediğimiz gibi, alt sınıflara bölme sorunu tam çözmüyor. Ama oldukça iyi sonuçlar veriyor. Bilmemiz gereken şey, hangi alt sınıfta hangi yöntemi kullanıyorsak kullanalım, sonuçta (f, f') eşleşmesini kurabilirsek integrali çözmüş oluyoruz.

Doğal olarak, alt sınıflarda integral alırken bazı kurallar ortaya çıkıyor. Onları birer alet (fomül) olarak kullanıyoruz. Aletler çok işimize yarar.

Alt sınıflara bölme eylemi için de genel geçerliği olan yöntemden söz edilemez. Ama tarih boyunca sınama-yanılma yöntemiyle ortaya çıkarılan bazı sınıflar oldukça standart sayılır. Bu kesimde onları ele alacağız. Yine de ele aldığımız alt sınıfların tam bir liste oluşturmadığını bilmeliyiz.

27.9 Sürekli Fonksiyonların İntegrali

Sürekli fonksiyonların ilkelleri vardır. Bunu bir teoremle ifade edebiliriz:

Teorem 27.61. *I aralığında $f(x)$ sürekli ve her $a \in I$ noktsında, değişken x değeri için*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{27.35}$$

ise $F(x)$ fonksiyonu I aralığında $f(x)$ fonksiyonunun ilkelidir. Başka bir deyişle, her $x \in I$ noktasınad $F'(x) = f(x)$ olur.

İspat:

x ile $x + \Delta x$ noktaları I aralığında iseler;

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

yazılabilir. Sağ yandaki ifdeye integralin ortalama değer teoremini uygularsak,

$$F(x+\Delta x) - F(x) = (x + \Delta x - x) f(c) = f(c)\Delta x$$

bağıntısını sağlayan ve Δx sayısının pozitif ya da negatif oluşuna bağlı olarak değişmek üzere

$(x \le c \le x + \Delta x)$, $(x + \Delta x \le x \le x)$ aralıklarının birinde olan olan bir c noktasının varlığını söyleyebiliriz. c noktası Δx değerine bağlıdır: $\Delta x \to 0 \Rightarrow c \to x$ olur. f sürekli olduğundan $\Delta x \to 0$ iken $f(c) \to f(x)$

olacaktır. Buradan türev tanımına geçersek,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c).\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olur ki bu istenen sonuçtur.

27.10 Değişken Değiştirme

Belirsiz integral alırken, genellikle ilkel fonksiyonu hemen göremeyiz O durumlarda, uygun bir değişken değiştirme (yerine koyma) ile integrali bilinen bir biçeme sokarız. Bunu yaptıran kural şudur.

Teorem 27.62. *$f(u)$ süreki ve $u(x)$ sürekli türevi var olan bir fonksiyon ise*

$$f(u(x)u'(x)\,dx = \int f(u)\,du\Big|_{u=u(x)} \tag{27.36}$$

Sağ yandaki terimin anlamı açıktır. $\int f(u)du$ integrli bulunduktan sunra $u = u(x)$ konularak sıl x değişkenine dönülür.

İspat:

$F(x)$ fonksionu $f(x$ fonksiyonunun ilkeli olsun. F nin varlığı f nin sürkliliği ile garanti edilir. Bkz (25.1). Zincir kuralı gereğnce,

$$\frac{d}{dx}F'(u(x)) = F'(u(x))u'(x)$$

yazabiliriz. Öyleyse,

$$\begin{aligned} \int f(u(x))u'(x)\,dx &= \int F'(u(x))u'(x)\,dx \\ &= f(u(x)) + C \quad (C \text{ sabit}) \end{aligned}$$

Son iki ifadeden, aranan (25.2) eşitliği çıkar.

Değişken değiştirmede, integranddaki asıl değişkenin yerine hangi değişkenin konulacağını söyleyen genel bir yöntem yoktur. Bu eylem integrali alanın deneyimine bağlı bir tür sınama-yanılma sürecidir. İntegral kavramı ortaya çıktığından beri çok sayıda sınama-yanılma yapılmış ve başarılı olanlar öne çıkmıştır. Aslında bütün integral alma eylemleri öyledir. Genel yöntem ortaya konamayınca, problem alt sınıflara bölünür ve her bir alt sınıfta geçerli olan çözüm yolları ortaya konulur.

Örnek 27.63. $\int sin^3 x.cosx\,dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = sinx \longrightarrow du = cosxdx$ konumuyla,

$$\begin{aligned} \int sin^3 x.cosx\,dx &= \int u^3 du \\ &= \frac{1}{4}u^4 \\ &= \frac{1}{4}sin^4 x + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.64. $\int sin^3 x\,dx$

integralini hsaplayınız.

Çözüm: Burada ilk örnekteki değişken değiştirme, integrandın ilkelini bulmaya yarayacak iyi bir sonuç vermez. Trigonometrk formülleri kullanarak biraz işlem yaparsak, $u = cos x \to du = -sin x$ konumunun daha iyi sonuç vereceği görülebilir:

$$\begin{aligned}\int sin^3 x\,dx &= \int (sin^2 x) sin x\,dx \\ &= \int (1 - cos^2 x) sin x\,dx \\ &= \int sin x dc - \int cos^2 x sin x\,dx \\ &= -cos x + \int u^2\,du \\ &= -cos x + \frac{1}{3} cos^3 x + C \\ &= \frac{1}{4} u^4 \\ &= \frac{1}{4} sin^4 x + C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.65. $I = \int (1-2x)^9 x\,dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu integrali hesaplamak için akla ilk gelen yol, istegrandı binom formülüne göre açmak, sonra çıka polinomu terim terime integre etmektir. O yöntem doğru ama uzun bir yöntemdir. Onun yerine $u = 1-2x$, $du = -2dx$ konumu işlemleri çok kısaltacaktır:

$$\begin{aligned}\int (1-2x)^9 x\,dx &= -\frac{1}{2}\int (1-2x)^9(-2dx) \\ &= -\frac{1}{2}\int (u)^9 (du) \\ &= -\frac{1}{20} u^{10} + C \\ &= -\frac{1}{20}(1-2x)^{10} + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.66. $I = \int_{+3}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

İntegrali alınacak ifadeyi karekökten kurtarmak için $x = \frac{3}{\cos t}$, $dx = 3\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$ ve sınırlar için, $2\sqrt{3} = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow t = \frac{pi}{}$; $+3 = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow T = 0$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} \cdot \frac{3\sin t}{\cos^2 t} dt \\
&= \int_0^{\frac{pi}{6}} \frac{\cos t}{3\sin t} \cdot \frac{3\sin t}{\cos^2 t} dt \\
&= \int_0^{\frac{pi}{6}} \frac{dt}{\cos t} \\
&= \int_0^{\frac{pi}{6}} \sec t \, dt \\
&= ln|\sec t + \tan t|_0^{\frac{pi}{6}} \\
&= ln\left|\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right| - ln|1+0| \\
&= ln\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Örnek 27.67. $I = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekök ile küp kökü yoketmek için 2 il 3 sayılarının ek küçük ortak katını (ekok) alalım. $x = t^6$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5 \, dt$ konumuyla

$$I = 6\int \frac{t^8}{t^2-1} dt$$

$$\frac{t^8}{t^2-1} = t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}$$

$$\begin{aligned}
I &= 6\int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt \\
&= 6\left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C \\
&= 6\left(\frac{x^{7/6}}{7} + \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + x^{1/6} + \frac{1}{2}\left|\frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1}\right|\right) + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.68. $I = \frac{x^4}{x^2+1} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: payın drecesi paydanın derecesnden küçük olmadığı için, önce payı paydaya bölmeliyiz.

$$\begin{aligned}
I &= \int dx - \int 2dxx^2 + 1 + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\
&= x - 2arctanx + \left(\frac{1}{2}arctanx + \frac{x}{x^2+1}\right) + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.69. $I = \frac{dx}{x^2+1} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = tant$, $dx = \sec^2 t dt$ konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sec^2 t}{(\tan^2 t + 1)^2} \\ &= \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t.\cos t + C \\ &= \frac{1}{2}\Big(arctanx + \Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)\Big) + C \end{aligned}$$

27.11 $\tan\frac{\theta}{2}$ *Konumu*

Bazı integrallerde değişken değiştirimi işi kolaylaştırır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x &= \tan\frac{\theta}{2} \\ \cos\theta &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \sin\theta &= \frac{2x}{1+x^2} \\ d\theta &= \frac{2dx}{1+x^2} \\ \theta &= 12\arctan x \\ x &= a\sin\theta \Leftrightarrow \theta = \arcsin\frac{x}{a} \\ x &= a\tan\theta \Leftrightarrow \theta = \arctan\frac{x}{a} \\ x &= a\sec\theta \Leftrightarrow \theta = arcsec\frac{x}{a} = \arccos\frac{x}{a} \end{aligned}$$

değişken değiştirimleri kullanılabilir.

Örnek 27.70.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta} dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$x = \tan\frac{\theta}{2}, \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}, d\theta = \frac{2dx}{1+x^2}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}} \\
&= \int \frac{2x}{2x+2} \\
&= \int \frac{dx}{x+1} \\
&= \ln|x+1| \\
&= \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}+1\right|_0^{\pi/2} \\
&= \ln 2 - \ln 1 \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.71.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \frac{1}{2}\sin t, dx = \frac{1}{2}\cos t\,dt, 1-4x^2 = 1-4\frac{1}{4}\sin^2 t = 1-\sin^2 t = \cos^2 t, 2x = \sin t, t0\arcsin(2x)$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{(1/2)\cos t}{\cos t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}t + C \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(2x) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.72.

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 t}{\cos t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{(1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos t}\,dt - \frac{1}{4}\int \cos t\,dt \\
&= \ln|secx + tanx| + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.73.
$$I=\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x=3\sin t, dx=3\cos t\,dt, 9-x^2=9\cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{9\cos^2 t}{3\cos t}\,dt \\ &= 3\int \cos t\,dt \\ &= 3\sin t + C \\ &= 3\arcsin\frac{x}{3} + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.74.
$$I=\int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x=\frac{1}{2}\sin t, dx=\frac{1}{2}\cos t\,dt, 1-4x^2=\cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}\cos t}{\frac{1}{2}\sin t.\cos t}\,dt \\ &= \int \frac{dt}{\sin t} \\ &= \int \sec t\,dt \\ &= \frac{sec t(\sec t+\tan t)}{\sec t+\tan t} \end{aligned}$$

$$u=\sec t+\tan t, du=\sec t\tan t+\sec^2 t=\sec t(\sec t+\tan t)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u|+C \\ &= \ln|sec t + tan t|+C \end{aligned}$$

$$x=\frac{1}{2}\sin t \Rightarrow 2x=\sin t \Rightarrow \sec t=\frac{1}{2x}$$

konumuyla,
$$I=\ln\left|\frac{1}{2x}+\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right|+C$$

bulunur.

Örnek 27.75.

$$I=\int \frac{\sin^5}{\sqrt{\cos x}}dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$u=\cos x, \quad du=-\sin x\, dx$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{\sin^5}{\sqrt{\cos x}}dx\\
&=\int \frac{(1-u^2)^2}{\sqrt{u}}\\
&=-\int (u^{\frac{7}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{-\frac{1}{2}})du\\
&=-\frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}}+\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}+C\\
&=-\frac{2}{9}(\cos x)^{\frac{9}{2}}+\frac{4}{5}(\cos x)^{\frac{5}{2}}-2(\cos x)^{\frac{1}{2}}+C
\end{aligned}$$

27.12 Kısmi İntegrasyon

İntegrali alınacak fonksiyonun ilkeli hemen görülemiyor, değişken değiştirimi için uygun bir değişken bulunamıyor ise kısmi integrasyon denilen yöntem bazen çözüm için uygun yol olabilir. Bu yöntem aslında iki fonksiyonun çarpımının türevine dayalıdır:

$$\int u\,dv \tag{27.37}$$

integralini arıyor olalım. uv çarpımının diferensiyeli olan

$$d(uv)=u\,dv+v\,du$$

eşitiğinin iki yanının integralleri de eşit olmalıdır:

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du$$

Buradan

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \tag{27.38}$$

bağıntısı çıkar. Bu aradığımız (25.5) integralidir. Bundan böyle (25.6) eşitliğini bir formül olarak kullanacağız. Bu yöntem öncelikle integrali alınacak fonksiyonun $uv\,dx$ biçiminde yazılabilmesini ve bir ya da ardışık kısmi integrasyon uygulamalarınad u çarpanının yok olmasını gerektirir. Aşağıdaki örnekler, kısmi integrasyon yönteminin nasıl çalıştığını gösterecektir.

Örnek 27.76.

$$\int xe^x\,dx \tag{27.39}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

İntegrandı iki fonksiyonun çarpımı biçimine getirelim: $u = x$, $dv = e^x dx$ konumuyla,

$$\int xe^x\,dx = xE3x - \int e^x\,dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$

Uyarı: Yukarıdaki değiken değiştirme eyleminde $u = e^x$, $dv = x\,dx$ alınmış olsaydı

$$\int xe^x\,dx = \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{1}{2}\int x^2e^x dx$$

gibi çözümü aslından daha zor olan bir integral ortaya çıkardı. O nedenle, kısmi integrasyon kullanılırken, işlem sonunda çarpanlardan birisinin yok olması önem kazanır.

Örnek 27.77.

$$\int \cos xe^{-x}\,dx \tag{27.40}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Türev ve integral işlemlerinde e^{-x} yok olmayacağına göre $\cos x$ fonksiyonu yokolması gereken fonksiyon olarak karşımıza çıkar.Tabii, bu fonksiyon da bir kez türev ya da integral larak yok edilemez. Ama ii defa türev alınca, kendisine eşit olacağından, bir aritmetik işlemle istenenintegrali elde edebiliriz:

$$\int \cos xe^{-x}\,dx = \sin xe^{-x} + \int sinxe^{-x}\,dx$$

Sondaki integrale tekrar kısmi integral uygularsak,

$$\int \sin xe^{-x}\,dx = \sin xe^{-x} - \int \cos xe^{-x}\,dx$$

çıkar. Son iki ifadeyi bir araya getirisek,

$$\int \cos xe^{-x}\,dx = \sin xe^{-x} - \cos xe^{-x} - \int \cos xe^{-x}\,dx \tag{27.41}$$

Dikkat edersek, son ifadedeki iki integral aynıdır. Dolayısıyla, eşitliği

$$\int \cos xe^{-x}\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C \tag{27.42}$$

biçiminde yazabiliriz.

Örnek 27.78.

$$\int (3x+5)\cos\frac{x}{4}\,dx \tag{27.43}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Kısmi integrasyon uygularken polinom biçimindeki fonkiyonların ilk adımda ya da ardışık adımlarda yok olacağını düşünerek,

$u = 3x+5$, $dv = \cos\frac{x}{4}$, $du = 3dx$, $v = 4sin\frac{x}{4}$

konumlarını yapabiliriz. Buradan,

$$\int (3x+5)\cos\frac{x}{4}\,dx = 4(3x+5)\sin\frac{x}{4} - 12\int \sin\frac{x}{4}\,dx$$
$$= 4(3x+5)\sin\frac{x}{4} + 48\cos\frac{x}{4} + C$$

olur.

Örnek 27.79.

$$\int x^2 \sin(10x)\, dx \tag{27.44}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = x^2$, $dv = \sin(10x)dx$, $du = 2xdx$, $v = -\frac{1}{10}\cos(10x)$

konumu yapılırsa,kısmi integrasyon formülünden

$$x^2 \sin(10x)dx = -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\int x\cos(10x)dx$$

yazılabilir. Sğdaki integral için bir kez daha kısmi integrasyon uygulnabilr:

$u = x$, $dv = \cos(10x)$, $du = dx$, $v = \frac{1}{10}\sin(10x)$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(10x)\, dx &= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}\sin(10x) - \frac{1}{10}\int sin(10x)dx\right) \\
&= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}\sin(10x) + \frac{1}{100}\cos(10x)\right) + C \\
&= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{x}{50}\sin(10x) + \frac{1}{500}\cos(10x) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.80.

$$I = \int_0^1 \arctan x\, dx, \tag{27.45}$$

integralini bulunuz.

Çözüm: Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned}
I &= \int \arctan x\, dx \\
&= x\arctan x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx \\
&= \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_0^1 \qquad = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

Örnek 27.81.

$$I = \int e^{ax} cosbx\, dx, \qquad (ab \neq 0) \tag{27.46}$$

interalini bulunuz.

Çözüm:

$$u = e^{ax}, du = ae^{ax}dx, dv = \cos bx, dxv = \frac{1}{b}\sin bx$$

konumuyla Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{ax} cosbx\, dx \\
&= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\, dx \\
&= \frac{1}{b}c\sin bx - \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I + C
\end{aligned}$$

Burdan

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}\,\frac{a}{b^2}e^{ax}\,(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

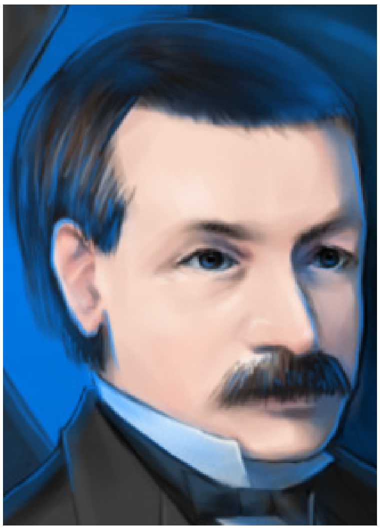
bulunur.

Benzer olarak

$$I = \int e^{ax}\sin bx\,dx, = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

eşitliği elde edilebilir.

Şekil 27.6: Hermann Schubert



Şekil 27.7: Leopold Kronecker

7.13 *Polinomların Çarpanlara Ayrılması*

Polinomların kökleri uygulamada önemli rol oynar. O nedenle polinomlar işlenirken bu konuya ağırlık verilir. Benzetmek gerekirse, bir polinomun çarpanlarına ayrılması bir sayının asal çarpanlarına ayrılması gibidir. Tabii, sayılarda var olan bütün özelikler polinomlarda olmaz.

Polinomları çarpanlarına ayırma konusu ilk kez 1793 yılında Hermann Schubert tarafından ortaya konulmuş 1882 yılında Leopold Kronecker bulduğu bir algoritma ile konuyu genelleştirmiştir. Bugün polinomu çarpanlara ayırma eylemi bilgisayar cebirinin temel taşlarından birisidir.

Bu kitapta polinomu çarpanlarına ayırma eylemi rasyonel fonksiyonların integralini bulmak için kullanılacaktır. O nedenle, bu kesimde bir $q(x)$ polinomunun çarpanlarına ayrılışını bize gerektiği kadarıyla ele alacağız. Önce iyi bilinen temel bilgileri anımsayalım:

Gerçel katsayılı her $Q(x)$ polinomu doğrusal ve quadratik çarpanlarının çarpımı olarak yazılabilir.

Tanım 27.82. *Katsayıları gerçel olan bir*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-1}x^{m-1} + a_nx^n \tag{27.47}$$

polinomunu düşünelim. Eğer

$$(x-c)^kS(x) \tag{27.48}$$

eşiliğini sağlayan bir $S(x)$ polinomu varsa c sayısı $q(x)$ polinomunun k-katlı bir köküdür.

$k = 1$ ise c sayısı tek katlı kök olur. n-inci dereceden bir polinomum n tane kökü vardır. Burada c sayısı $q(x)$ polinomunun k-katlı kökü ise geri kalan köklerin sayısı $n-k$ tanedir ve onlar $S(x)$ polinomunun kökleri olur. Kökler gerçel ya da karmaşık sayı olabilirler.

Teorem 27.83. *Özdeş iki polinomun aynı dereceli terimlerinin katsayıları birbirlerine eşitttir.*

İspat: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-1}x^{m-1} + a_nx^n$
ve

$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$

polinomları özdeş olsunlar. O zaman farkları 0'a özdeş olmalıdır:
$n > m$ ise

$$\equiv p(x) - q(x) \tag{27.49}$$

$$\equiv (a_0 - b_0) + (a - 1 - b_1)x + \ldots(a_m - b_m)x^m + a_{m+1}x + \ldots + a_nx^n \tag{27.50}$$

olmalıdır. Bunun olabilmesi için

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m, a_{m+1} = 0, \ldots a_n = 0 \tag{27.51}$$

$n < m$ ise benzer düşünce geçerlidir.

Teorem 27.84. *$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} + b_mx^m$ polinomunun $(x-c)q_1(x)$ biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve yeterli koşul c nin bir kök olması; yani $q(c) = 0$ olmasıdır.*

İspat:
$q(x)$ polinomu $x - c$ ile tam bölünebiliyorsa $q(c) = 0$ olacağından,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x) - q(c) \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} + b_mx^m - (\\ &\quad b_0 + b_1c + b_2c^2 + b_3c^3 + \ldots + b_{n-1}c^{m-1} + b_mc^m) \\ &= b_1(x-c) + b_2(x^2-c^2) + b_3(x^3-c^3) + \ldots + b_m(x^m - c^m) \end{aligned} \tag{27.52}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x-c)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + c^{n-1}\right), \qquad (n = 1, 2, \ldots, m) \tag{27.53}$$

dir. (39.19) ve (39.20) bağıntılarından istenen çıkar.

Polinomun bazı kökleri tamsayı olabilir.

Örnek 27.85.

$$q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \tag{27.54}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Baş katsayısı 1 olan bir polinomun tam sayı kökü varsa sabit teriminin bir çarpanıdır. Burada sabit terim 2'dir. 2'nin çarpanları $\pm1, \pm2$ olmak üzere dört tanedir. Bunlar arasında $c_1 = 2$ sayısı $q(c_1) = 0$ eşitliğini sağlar. O halde,

$$q(x) = (x-2)q_1(x) = (x-2)(x^2-1) \tag{27.55}$$

yazılabilir. Tekrar $q_1(x)$ polinomunun köklerini bulmamız gerekiyor. Bu polinom ikinci dereceden olduğu için köklerini formülden bulabiliriz: $c_2 = -1$ $c_3 = +1$ olur. $q(x)$ polinomunun üç kökünü de bulduğumuza göre onu

$$q(x) = (x-2)(x+1)(x-1) \tag{27.56}$$

biçiminde çarpanlarına ayırabiliriz.

Polinomum bazı kökleri irrasyonel sayı olabilir.

Örnek 27.86.

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \tag{27.57}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 6 sayısının çarpanları $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ sayılarıdır. Bunlar arasında $p(c) = 0$ yapan tek sayı $c_1 = 3$ sayısıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)q_1(x)(x-3)(x^2-2) \tag{27.58}$$

olur. Geriye kalan $q_1(x) = (x^2-2)$ polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri $\pm\sqrt{2}$ dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \tag{27.59}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Örnek 27.87.
$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$$
polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda x değişkeninin her terimde olduğu apaçık görünüyor. Öyleyse,
$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$
yazabiliriz.Parantez içindeki polinomun tansayı kökleri varsa 8 sabitinin çarpanları olacağından, $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ sayılarının kök olup olmadıklarını denemeliz. $c = 2$ sayısı için $q_1(2) = 0$ olduğu; yani $c_2 = 2$ sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan
$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x-2)q_2(x) = x(x-2)(x^2 - 2x - 4)$$
yazılabilir. Burada geriye kalan $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$ ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. O halde, $q(x)$ polinomu
$$q(x) = x(x-2)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$$
biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Polinomum bazı kökleri karmaşık sayı olabilir.

Örnek 27.88.
$$q(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$$
polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: Beşinci dereceden olduğu için bu polinomum beş tane kökü olduğu biliniyor. Ancak üçüncü dereceden büyükler için kökü bulmamızı sağlayan bir formül yoktur. Sabit terimin $\pm1, \pm2, \pm4$ sayılarından $+1$ sayısının kök olduğu denenerek görülebilir. $q(x) = (x+1)q_1(x)$ yazarsak $q_1(x) = (x^2+2)^2$ olduğu ve $q_1(x)$polinomunun gerçel kökünün olmadığı görülür. Geri kalan dört kökün dördü de karmaşık sayıdır.
$$q(x) = (x+1)(x^2+2)^2.$$

Örnek 27.89.
$$q(x) = 8x^4 - 4x^3 + 10x^2$$
polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: Dördüncü dereceden olan bu polinomun 4 tane kökü vardır. $2x^2$ çarpanı ortak olduğu için polinomu,
$$q(x) = 2x^2\left(4x^2 - 2x + 5\right)$$
biçiminde çarpanlara ayırısak, $(4x^2 - 2x + 5)$ çarpanının ikinci dereceden ve gerçel kökü olmadığı görülür. Kökler
$$x_1 = 0.25 + 1.0897247358852i, \quad x_2 = .25 - 1.0897247358852i$$
dir. Öyleyse,
$$q(x) = 2x^2\ (x - .25 + 1.0897247358852i)\,.\,(x - .25 - 1.0897247358852i)$$
olur.

27.14 *Basit Kesirlere Ayırma*

İki polinomun oranı biçiminde yazılan fonksiyonlara rasyonel fonklsiyon denilir. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinde $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden daha küçükse, rasyonel fonksiyona basit, değilse bileşik kesir denilir.

$Q(x)$ paydasının $(x-a_k)^m$ bir çarpan ve $(x^2+px+q)^r$ bir quadratik çarpan ise rasyonel fonksiyon

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(x-a_k)^k} + \sum_{r=1}^{R} \frac{b_m x + C_m}{(x^2+px+q)^r}$$

biçiminde basit kesirlerine ayrılır. Sonra her basit kesir için kendi sınıfına ait integral yöntemi uygulanaır.

27.15 *Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi*

Şimdi en basit halden başlayarak rasyonel fonksiyonların integrallenmesini inceleyeceğiz.

Örnek 27.90.

$$I = \int \frac{1}{1-x^2}\, dx \tag{27.60}$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \equiv \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \equiv \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \equiv \frac{(A-B)x+(A+B)}{1-x^2} \\
&\Rightarrow (A-B=0, (A+B)=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1-x)}\right)
\end{aligned}$$

Artık sağ taraftaki basit kesirlerin integralleri alınabilir:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{1-x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1-x)}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\ln(1+x) - ln(1-x)) + \ln C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left| C\frac{(1+x)}{(1-x)}\right|
\end{aligned}$$

Örnek 27.91.

$$I = \int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx \tag{27.61}$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

İntegrali alınacak fonksiyonun payının derecesi paydanın derecesinden büyük olduğu için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^5+1}{x^2-1} = x^3 + x + \frac{x+2}{x^2-1} \tag{27.62}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2-1} &= \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \\
\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \\
&= \frac{A(x+1)}{x-1} + \frac{B(x+1)}{x-1} \Rightarrow \\
&= \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1} \\
&\Rightarrow A = 3/2,\ B = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Bulduğumuz bu deperleri (25.35) eşitliğinde kullanırsak,

$$\frac{x^5+2}{x^2-1} = x^3 + x - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} \tag{27.63}$$

olur. Sağ yandaki terimler integrallenebilir olduğundan

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx \\
&= \int x^3\,dx + \int x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.92.

$$I = \int \frac{3x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Kısmi kesirlerine ayırıp integrale geçilirse,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2+2} + \int \frac{xdx}{(x^2+2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}\,dx \\
&= ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} \\
&= ln|x| - \frac{1}{2}ln(x^2+2) - \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2)} + \frac{1}{4}\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.93.

$$I = \int \frac{6x^3+5x^2+21x+12}{x(x+1)(x^2+4)}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{6x^3+5x^2+21x+12}{x(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$
$$6x^3+5x^2+21x+12 \equiv A(x+1)(x^2+4)+Bx(x^2+4)+(Cx+D)x(x+1)$$
$$\equiv (A+B+C)x^3+(A+D+C)x^2+(4A+4B+D)x+4A$$
$$\Rightarrow A+B+C=6$$
$$A+C+D=5$$
$$4A+4B+D=21$$
$$4A=12$$
$$\Rightarrow A=3, B=2, C=1, D=1$$

Bunları yerlerine koyarsak, integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{x}\,dx+\int \frac{2}{x+1}+\int \frac{x+1}{x^2+4}\,dx \\ &= 3\ln|x|+2ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}Arctan\frac{x}{2}+C \\ &= \ln\left|x^3(x+1)^2\sqrt{x^2+4}\right|+\frac{1}{2}Arctan\frac{x}{2}+C \end{aligned}$$

Örnek 27.94.

$$I=\int \frac{x^5-x^4-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{x^5-x^4-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} &= (x+1)+\frac{-2x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ &= (x+1)+\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} \\ &= (x+1)+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left((x+1)+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+x+ln(x^2+1)+tan^{-1}x-2ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C \end{aligned}$$

Örnek 27.95.

$$I=\int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 2x^2-6x+4 &= 2(x^2-3x)+4 \\ &= 2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}+4-\frac{9}{2}\right) \\ &= 2(u^2-a^2) \qquad \Rightarrow u=x-\frac{3}{2},\quad a=\frac{1}{2},\quad du=dx \\ x+1 &= u+\frac{5}{2} \end{aligned}$$

konumu yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{u+\frac{5}{2}}{\sqrt{2(u^2-a^2)}}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int 2z^{-\frac{1}{2}}\,dz + C_1 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{z} + C_1 \\
&= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + C_1
\end{aligned}
$$

$$
I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}\, ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C_2
$$

O halde,

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C \\
&= \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|(x-\frac{3}{2})+\sqrt{x^2-3x+2}\right| + C
\end{aligned}
$$

çıkar.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \\
&= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + C_1
\end{aligned}
$$

$$
I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C_2
$$

Örnek 27.96.

$$
I = \int \frac{1}{4x^2+4x+2}\,dx
$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{4(x^2+x)+2} \\
&= \int \frac{dx}{4(x^2+x+\frac{1}{4})+(2-\frac{4}{4})} \\
&= \int \frac{du}{4(u^2+1)}, \qquad (u = x+\frac{1}{2})\} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+(\frac{1}{2})^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1/2} arctan \frac{u}{\frac{1}{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2} arctan(2x+1) + C
\end{aligned}$$

27.16 Rasonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması

Rasyonel fonksiyon iki polinomun bölümü biçiminde olan fonksiyonlardır:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 4a_3x^3 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 4b_3x^3 + \ldots + b_nx^m} \tag{27.64}$$

bu ifadede $n \geq m$ ise rasyonel fonksiyona bileşik kesir, $m < n$ ise basit kesir denilir. Başka bir deyişle, paydanın derecesi payın derecesinden küçükse rasyonel fonksiyona bileşik kesir, değilse basit kesir denilir. Bu sınıflandırma sayılardaki bileşik ve basit kesir tanımı gibidir.

Bileşik kesir halinde olan rasyonel fonksiyonlar basit kesirlerine ayrılabilir. Bunun için paydaki polinomun paydadaki polinoma bölünmesi yeterlidir. Bu bölme işlemi sonunda,

$$r(x) = p_1(x) + r_1(x) \tag{27.65}$$

gibi bir ifade çıkar. Burada, *der* simgesi polinomum derecesini göstermek üzere, $r_1(x)$ bir polinomdur ve derecesi $n - m$ dir. $r_1(x)$;yani

$$r_1(x) = \frac{p_2(x)}{q(x)} \qquad (der\{p_2\} < der\{q\}) \tag{27.66}$$

biçiminde rasyonel bir fonsiyondur ve payın derecesi paydanın derecesinden kesinlikle küçüktür.

Bu türlerin integrali için parçalı kesirlere ayırma (partial fraction) yöntemi kullanılır. İntegrallenen rasyonel fonksiyon parçalı kesirlerine ayrılınca her terim bilinen yöntemlerle integrallenebilir hale gelir.

(25.37) biçiminde bir fonksiyonun integrali isteniyorsa, sırasıyla şu eylemler yapılır:

1. $p(x)$ polinomumun derecesi $q(x)$ polinomunkinden büyükse, önce

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + r_1(x) \tag{27.67}$$

bölme işlemi yapılır.

2. Bölme işleminin verdiği $p_1(x)$ polinomu terim terime integrallenebilir.

3. Rasyonel $r_1(x)$ fonksiyonunun $q(x)$ paydası çarpanlarına ayrılır.

4. Her çarpana karşılık gelen basit kesirler bulunur.

5. Bulunan kesirlerin tek tek integralleri alınır.

Rasyonel fonksiyonun parçalı kesirlere ayrılması eylemi polinomların bir konusudur. Ama rasyonel fonksiyonların integralinde sık sık karşılaşacağımız basit kesirlere ayırma eyleminin esaslarını anlatmalıyız.

n-inci dereceden bir polinomun n tane kökü olduğunu biliyoruz. Önceki kesimde her köke karşılık polinomun bir çarpanı olduğunu söylemiştik.

Teorem 27.97. $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 4b_3x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} + b_mx^m$ *polinomunun* $(x-c)q_1(x)$ *biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve yeterli koşul* c *nin bir kök olması; yani* $q(c) = 0$ *olmasıdır.*

Rasyonel fonksiyonların basit kesirlere ayrılışını gösteren aşağıdaki teoremin ispatı, bu kitapta olmayan bazı teknik bilgilere dayanır. O nedenle teoremi ispatsız olarak ifade edeceğiz:

Teorem 27.98. *Basit kesir biçimindeki rasyonel* $q(x)$ *fonksiyonun paydası*

$$q(x) = a(x-c_1)^{r_1}\ldots(x-c_k)^{r_k}\left((x^2+b_1x+d_1)^{s_1}\ldots(x^2+b_mx+d_m)^{s_m}\right) \tag{27.68}$$

biçiminde ve bu gösterimdeki iki doğrusal ya da quadratik çarpan aynı değil ve indirgenemez ise $q(x)$ *rasyonel fonksiyonu,*

$$q(x) = B_{lin} + B_{quad} \tag{27.69}$$

biçiminde iki blok'un toplamına eşittir. Bu bloklar için aşağıdaki kurallar geçerlidir: Her farklı $(x-c_i)$ *doğrusal çarpanı için,* c_i *k katlı kök ise,*

$$B_{lin} = \frac{A_1}{(x-c_i)} + \frac{A_2}{(x-c_i)^2} + \ldots + \frac{A_{r_i}}{(x-c_i)^{r_i}} \tag{27.70}$$

biçimindeki k terimli bir blok oluşur..

$(x^2+b_ix+d_i)$ *quadratik çarpanı m-katlı bir çarpan ise*

$$B_{quad} = \frac{B_1x+C_1}{(x^2+b_ix+d_i)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+b_ix+d_i)^2} + \ldots + \frac{B_{s_i}x}{(x^2+b_ix+d_i)^{s_i}} \tag{27.71}$$

biçimindeki m öğeli bir blok oluşur.

Bloklardaki A_h, B_s, C_t *sabit katsayıları* $q(x)$ *polinomuna bağlı olarak tek olarak belirlenebilirler.*

(39.101) ve (36.9) ifadelerinde terim sayıları ilgili kökün kaçıncı dereceden katlı kök olduğuna bağlıdır. Örneğin, $r_k = 1$ ise c_1 tek katlı kök olur. Dolayısıyla, B_{lin} blokunun tek öğesi var olur. $\frac{A_1}{(x-c_1)}$ terimi (B_{lin}) blokunun biricik terimi olur. Benzer şekilde, $s_m = 1$ ise (36.9) blokunun biricik terimi $\frac{B_1x+C_1}{(x^2+b_1x+d_1)}$ olur.

İspat:

$q(x)$ polinomu $x-c$ ile tam bölünebiliyorsa $q(c) = 0$ olacağından,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x) - q(c) \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 4b_3x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} + b_mx^m - (\\ &\quad b_0 + b_1c + b_2c^2 4b_3c^3 + \ldots + b_{n-1}c^{m-1} + b_mc^m) \\ &= b_1(x-c) + b_2(x^2-c^2) + b_3(x^3-c^3) + \ldots + b_m(x^m-c^m) \end{aligned} \tag{27.72}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + c^{n-1}, \qquad (n = 1, 2, \ldots, m) \tag{27.73}$$

dir. (39.19) ve (39.20) bağıntılarından istenen çıkar.

Örnek 27.99.
$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \tag{27.74}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 6 sayısını çarpanları $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ sayılarıdır. Bunlar arasında $p(c) = 0$ yapan tek sayı $c_1 = 3$ sayısıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)q_1(x)(x-3)(x^2-2) \tag{27.75}$$

olur. Geriye kalan $q_1(x) = (x^2 - 2)$ polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri $\pm\sqrt{2}$ dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \tag{27.76}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Örnek 27.100.
$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x \tag{27.77}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda x dğişkeninin her terimde olduğu apaçık görünüyor. Öyleyse,
$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$
yazabiliriz.Parantez içindeki polinomun tansayı köklei varsa 8 sabitinin çrpanları olacağından, $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ sarılarının kök olup olmadıklarını denemeliz. $c = 2$ sayısı için $q_1(2) = 0$ olduğu; yani $c_2 = 2$ sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x-2)q_2(x) = x(x-2)(x^2 - 2x - 4) \tag{27.78}$$

yazılabilir. Burada geriye kalan $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$ ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. Ohalde, $q(x)$ polinomu

$$q(x) = x(x-2)(x+14\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5}) \tag{27.79}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

$$x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4X + 4 \tag{27.80}$$

27.17 *Rasyonelleştirme*

İntegrali alınacak fonksiyon köklü ifadeler içriyor, ya da integrali bilinen bir tipten değilse, uygun bir değişken değiştirimi ile rasyonel fonksiyon haline getirilir ve ona rasyonel fonksiyon için bilinen integral alma yöntemleri uygulanır.

Örnek 27.101.
$$\int \frac{sqrtx}{1 + \sqrt[3]{x}} \tag{27.81}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: İntegrali alınacak fonsiyon bir kare kök, bir de küp kök içeriyor. her iki köklü ifadeden kurtulmak için $u = \sqrt[3]{x}$, $x = u^6$, $6u^5 du = dx$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
int\frac{sqrtx}{1+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{u^3}{1+u^2}\,du \\
&= \int (6u^6 - 6u^4 + 6u - 6 + \frac{1}{1+u^2} \qquad \text{(payı paydaya böl)} \\
&= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + \tan^{-1} u + C \\
&= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1} x^{\frac{1}{6}} + C
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 27.102.

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx \tag{27.82}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$u = 1 + e^x$, $ln(u-1) = x$, $\frac{1}{u-1}\,du = dx$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+e^x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{u}\frac{1}{u-1}\right) du \\
&= \int \frac{1}{1+e^x}\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u-1}\right) du \\
&= ln|u-1| - ln|u| + lnC \\
&= C.ln\left|\frac{u-1}{u}\right| \\
&= C.ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| \\
&= C.ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)
\end{aligned}
$$

27.18 Köklü İfadelerin İntegrali

Köklü ifadelerin integrali için kullanılan geçerli yönten, integrandı kökten kurtaracak uygun bir değişken değiştirimi yapmaktır. Dolayısıyla bu kesimi (25.4) kesimi içinde görmek daha doğrudur. Birkaç örnek söylediğimiz kanıtlayacaktır.

Örnek 27.103.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\pi + 2x}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Burada zorluğu yaratan terim kareköklü terimdir. Karekökten kurtulmak için uygun bir değişken değiştirimi bulmalıyız. Deneyerek $u^2 = \pi + 2x$, $2udu = 2dx \Rightarrow dx = udu$ konumunun işe yaradığını görebiliriz:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\pi+2x}}\,dx &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}}\\ &= \int \frac{udu}{u}\\ &= \int du\\ &= u+C\\ &= \sqrt{\pi+2x}+C\end{aligned}$$

Örnek 27.104.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekökten kurtulmak için, $u^2 = 3x-1$, $x = \frac{1}{3}(u^2+1)$, $2udu = dx$, $dx = \frac{2}{3}udu$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx &= \frac{2}{9}\int \frac{(u^2+1)}{u}udu\\ &= \frac{2}{9}\int udu + \frac{2}{9}\int \frac{du}{u}\\ &= \frac{1}{9}u^2 + \frac{2}{9}ln|u| + C\\ &= \frac{1}{9}(3x-1) + \frac{2}{9}ln|\sqrt{3x-1}| + C\end{aligned}$$

Örnek 27.105.

$$\int \left(x^2-4x+4\right)^{-\frac{5}{3}}\,dx \tag{27.83}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Uygun bir değişken değiştirimi ile küp kökten kurtulmalıyız. Bunun için küp köklü ifadenin içinin $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ olduğunu görelim. Sonra

$u^3 = (x-2)$, $3u^2du = dx$, $(x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{\frac{10}{3}}$

konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \left(x^2-4x+4\right)^{-\frac{5}{3}}\,dx &= \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2-4x+4})^5}\,dx\\ &= \int \frac{3u^2}{u^{10}}\,du\\ &= -\frac{3}{7}u^{-7}+C\\ &= -\frac{3}{7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}}+C\end{aligned}$$

Örnek 27.106.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \tag{27.84}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u^2 = x, 2udu = dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx &= \int \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}}du\\ &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du\\ &= 2Arcsinu + C\\ &= 2Arcsin\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 27.107.

$$I = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}}dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}2x^2-6x+4 = 2(x^2-3x)+4 &= 2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+4-\frac{9}{2}\\ &= 2(u^2-a^2)\\ u &= x-\frac{3}{2}\\ a &= \frac{1}{2}\\ du &= dx\\ x+1 &= u+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{(u+\frac{5}{2})du}{\sqrt{2(u^2-a^2)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int z^{-1/2}dz &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{2}z^{1/2} + C_1\\ &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + C_1\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C_2$$

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2\\ &= \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}ln\left|x+\frac{-3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right| + C\end{aligned}$$

Örnek 27.108.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = a\ \cos^u + b\ \sin^2 u$$
$$dx = (-2a\cos u.\sin u + 2b\sin u\cos u)\,du$$
$$2\sin u\cos u(b-a)\,du$$
$$= (b-a)\sin 2u\,du(x-a \qquad = a(\cos^2 u - 1) + b\sin^2 u = (b-a)\sin^2 u$$
$$(b-x) = b((1-\sin^2 u) - a\cos^2 u = (b-a)\cos^2 u$$
$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin u\cos u$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx \\ &= \int \frac{(b-a)\sin 2u}{(b-a)\sin u\cos u}\,du \\ &= 2\int du \\ &= 2u + C \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\frac{x-a}{b-x} = \tan^2 u \Rightarrow u = \arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

değeri kullanılarak,

$$I = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C$$

bulunur.

Örnek 27.109.

$$I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = 2\tan t, dx = 2(1+\tan^2 t)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{(\pi/2)} \frac{1}{\sqrt{4(1+\tan^2 t)}}(1+\tan^2 t)2dt \\ &= \int \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\frac{2}{\cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t(\sec t + \tan t)}{(\sec t + \tan t)}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t\tan t + \sec^2 t}{(sec t + \tan t)}\,dt \\ &= \int \frac{du}{u} \qquad (u = \sec t + \tan t) \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|sec t + \tan t| + C \\ &= \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

Örnek 27.110.
$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x = \sqrt{3}\tan t, dx = \sqrt{3}\sec^2 t\,dt$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\,dx \\
&= \int \frac{\sqrt{3}\sec^2 t}{3\tan^2 t\sqrt{3}\sec t}\,dt \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt \\
&= \frac{1}{3}\int (\sin^2 t)\,d(\sin t) \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{\sin t} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.111.
$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x = \frac{2}{\cos t}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx \\
&= \int \frac{\frac{2\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{2}{\cos t}\cdot\frac{2\sin t}{\cos t}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int dt \\
&= \frac{1}{3}t + C \\
&= \frac{1}{3}\arccos(\frac{2}{x}) + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.112.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{\pi+2x}}\,dx \\
&= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}} \\
&= \int \frac{udu}{u} \qquad (u^2 = \pi+2x, 2udu = 2dx, dx = udu) \\
&= u + C \\
&= \sqrt{\pi+2x} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.113.

$$\int (1-2x)^9 dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^9(-2dx) = -\frac{1}{20}(1-2x)^{10} + C$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\, dx \\
&= \frac{2}{9}\int \frac{(u^2+1)}{u^2}\, du \qquad (u^2 = 3x-1) \\
&= \frac{2}{3}\int u du + \frac{2}{9}\int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{3}(3x-1) + \ln\sqrt{3x-1} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.114.

$$I = \int (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$(x^2-4x+4) = (x-2)^2,\ u^3 = x-2,\ 3u^2 du = dx,\ (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{\frac{-10}{3}}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}}\, dx \\
&= \int \frac{3u^2}{u^{10}}\, du \\
&= -\frac{3}{7}u^{-7} \\
&= -\frac{3}{7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.115.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u^2 = x$ konumuyla,,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\, dx \\
&= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \int \arcsin u + C \\
&= 2\arcsin\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} + C \tag{27.85}$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\, dx = u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C \tag{27.86}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{-3x}-1}\, dx = \frac{1}{3}\ln|e^{3x}-1| + C \tag{27.87}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}(1+e^{-\sqrt{x}})}\,dx = 2\int \frac{du}{1+e^{-u}} = 2\int \frac{e\hat{u}du}{1+e^{u}} = \ln(e\hat{u}+1)+C \qquad (27.88)$$

$$\int \frac{2^x}{4^x+1}\,dx = \int \frac{1}{\ln 2}\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \frac{\sinh^{-1}(2^x)}{\ln 2} = \frac{\ln(2^x+\sqrt{4^x+1})}{\ln 2}+C$$

$$\int \frac{\sinh\sqrt{x}.\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sinh^2\sqrt{x}+C \qquad (27.89)$$

27.19 İndirgenme Yöntemleri

İntgral eylemindeki indigeme formülleri yinelge (recurrence) formüllerinin özel halidir. Yinelge, bir eylemin art arda tekrarlanarak en yalın (çözülebilir) biçimine dönüştürülmesidir. Bunu integral için bir örnekle açıklayabiliriz. Örneğin,

Örnek 27.116.

$$\int cos^n x\,dx \qquad (27.90)$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. O durumda kuvveti düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\cos x)^n\,dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1}.\cos x\,dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1}.d(\sin x) \end{aligned}$$

Kısmi integrasyon işlemleriyle,

$$\begin{aligned} \int \cos^n x\,dx &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - \int \sin x.d\left((\cos x)^{n-1}\right) \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int \sin x.(\cos x)^{n-2}.\sin x\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2}.(\sin x)^2\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2}.(1-(\cos x)^2\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2}.dx - (n-1)\int (\cos x)^n\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

çıkar. Buradan I_n çözülürse

$$\begin{aligned} I_n + (n-1)I_n &= (\cos x)^{n-1}.\sin x + (n-1)I_{(n-2)} \\ nI_n &= (\cos x)^{n-1}.\sin x + (n-1)I(n-2) \\ I_n &= \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}.\sin x + \frac{n-1}{n}I_{(n-2)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\int (\cos x)^n\,dx = \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}.\sin x + \frac{n-1}{n}\int (\cos x)^{n-2}\,dx \qquad (27.91)$$

indirgeme formülü bulunur. Benzer şekilde,

$$\int (\sin x)^n\,dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}.\cos x + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2}\,dx \qquad (27.92)$$

Örnek 27.117.

$$\int \cos^5 x\,dx$$

integralini bulmak isteyelim. $n=5$ olduğundan

$$\begin{aligned} n=5 &\Longrightarrow I_5 = \int (\cos x)^5\,dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3 \\ n=3 &\Longrightarrow I_3 = \frac{1}{3}(\cos x)^2 . \sin x + \frac{2}{3} I_1 \\ n=1 &\Longrightarrow I_1 = \int \cos x\,dx = \sin x + C_1 \end{aligned}$$

Şimdi yürünülen yola geri dönülürse,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \cos x\,dx = \sin x + C_1 \\ I_3 &= \frac{1}{3}(\cos x)^2 . \sin x + \frac{2}{3} sinx + C_2 \qquad (C_2 = \frac{2}{3}C_1) \\ I_5 &= \frac{1}{5}(\cos x)^4 . \sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}(\cos x)^2 . \sin x + \frac{2}{3}\sin x\right) + C \end{aligned}$$

Örnek 27.118.

$$I_n = \int x^n e^{\alpha x}\,dx \tag{27.93}$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. x^n çarpanının kuvvetini düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} I_n &= \int x^n e^{\alpha x}\,dx \\ &= \frac{1}{n+1}\int e^{\alpha x} d(x^{n+1}), \qquad \left(x^n dx = \frac{d(x^{n+1})}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} d(x^{n+1}) &= x^{n+1}e^{\alpha x} - \int x^{n+1} d(e^{\alpha x}) \\ &= x^{n+1}e^{\alpha x} - \alpha \int x^{n+1} e^{\alpha x}\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n+1) I_n &= x^{n+1}e^{\alpha x} - \alpha I_{n-1} \\ I_n &= \frac{1}{\alpha}\left(x^n e^{\alpha x} - n I_{n-1}\right) \end{aligned}$$

çıkar. Buradan

$$\int x^n e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\left(x^n e^{\alpha x} - n\int x^{n-1}e^{\alpha x}\right) \tag{27.94}$$

indirgeme formülü bulunur.

27.20 *Bazı İndirgeme Formülleri*

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx \\
\Longrightarrow I_n &= \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a(2n+1)} - \frac{2nb}{a(2n+1)} I_{n-1} \\
I_n &= \int \frac{1}{x^n\sqrt{(ax+b)}}\,dx \\
\Longrightarrow I_n &= -\frac{\sqrt{(n-1)bx^{n-1}}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2b(n-1)} I_{n-1} \\
In,m &= \int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n} \\
\Longrightarrow a^2 In,m &= a^2 Im,n + Im-2,n \\
I_n &= \int x^n \sin(ax)\,dx \\
\Rightarrow a^2 I_n &= -ax^n\cos(ax) + nx^{n-1}\sin(ax) - n(n-1)I_{n-2} \\
J_n &= \int x^n \cos(ax)\,dx \\
\Rightarrow a^2 J_n &= ax^n\sin(ax) + nx^{n-1}\cos(ax) - n(n-1)J_{n-2} \\
I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\
\Rightarrow I_n &= \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}
\end{aligned}
$$

Örnek 27.119. *$a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda*

$$I_n = \int x^a (\ln x)^n\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}(\ln x)^n - \frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx \qquad (27.95)$$

indirgemr formülünü ispatlayınız.

$$u = (\ln x)^n,\ du = n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx, dv = x^a\,dx,\ v = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$$

konumuyla,

$$I_n = \frac{1}{a+1}x^{a+1} - \frac{n}{a+1}\int x^{a+1}(\ln x)^{n-1}\,dx \quad \square$$

Örnek 27.120. *$a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda*

$$I_n = \int x^{-1}(\ln x)^n\,dx = \int (\ln x)^n\,d(\ln x) = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C \qquad (27.96)$$

dir.

$$I_n = \int \sin^n(ax)\cos(ax)\,dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C \qquad (27.97)$$

dir.

$$I_n = \int \cot(ax)\,dx = \ln|\sin(ax)| + C \qquad (27.98)$$

dir.

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^2 x . \sec^2 xd - \int \tan^{n-2} xdx \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} I &= \int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= -\ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

dir.

$$I = \int \sec(x)\, dx = \ln|\sec(x) + \tan x| + C$$

dir.

$$I = \int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \int \cos(ax)\, d(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

dir.

27.21 Bağlantılı Oranlar

1. Bir parçacık $2 = x + 2y$ doğrusu boyunca pozitif yönde gidiyor.

   (a) x koordinatının değişimi saniyede 4 birim ise y koordinatını değişimi nedir?

   (b) y koordinatının değişimi saniyede -2 birim ise x koordinatını değişimi nedir?

   Çözüm:

   (a):

   $$x + 2y = 2 \Rightarrow x' + 2y' = 0 \Rightarrow 4 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -2 \text{ br/sn}$$

   olur. (b):

   $$x + 2y = 2 \Rightarrow x' + 2(-2) = 0 \Rightarrow x' - 4 = 0 \Rightarrow x' = 4 \text{ br/sn}$$

   olur.

2. Bir parçacık $x^2 + y^2 = 25$ eğrisi boyunca hareket ediyor. $(3,4)$ noktasından geçerken y koordinatı saniyede 2 birim azalıyor. x koordinatının değişimi nedir?

   Çözüm: $x = 3$ iken $y = 4$ dür.

   $$2xx' + 2yy' = 0 \Rightarrow 3x' + 4(-2) = 0 \Rightarrow x' = \frac{8}{3}$$

   olur. Demek ki x koordinatının değişimi $\frac{8}{3}$ br/sn dir.

3. Bir kamera bir eşkener üçgenin oranlarını koruyarak küçültüyor. Belirli bir anda bir kenarın küçülmesi k cm/sn dir. Üçgenin alanının değişim oranı nedir?

   Çözüm:

   Alan formülünü yazalım. Eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu x ise yüksekliği $h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}4}{x}$ olacaktır. Öyleyse alan

   $$A = \frac{1}{2}hx = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$
   $$A' = \frac{\sqrt{3}}{4}2xx' = \frac{\sqrt{3}}{2}xk\ cm^2/\text{dk}$$

   olur.

4. Özel Görelilik kuramına dingin haldeyken kütlesi m olan bir cismin hızı v ise, ışık hızı c olmak ğüzere, cismin uzaydaki hızı

   $$m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

   dir. Cismin hızı ışık hızının yarısına eşit olduğunda, hızının değişimi saniyede $0.01c$ ise kütlesinin değişimi nedir? [Görelilik kuramına göre cismin kütlesi hızına bağlı olarak değişir.]

   Çözüm: Cismin hareket halindeki kütlesine M diyelim.

   $$M = m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$
   $$M' = m\frac{vv'}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

   olur.

5. Kenar uzunlukları x ve y olan dikdörtgenin kenarları, sırasıyla, u ve v oranında değişiyor. Dikdörtgenin alanının değişim oranını bulunuz.

   Çözüm:

   Dikdörtgenin alanı $A = xy$ dir. t anındaki değişim

   $$\frac{dA}{dt} = x'y + xy' = uy + vx$$

   olur.

6. İki bisiklet yarışçısından birisi (G) güneyden kuzeye doğru bitim noktasına (finish F), ötekisi (D) doğudan batıya doğru aynı bitim noktasına (F) doğru yol alıyorlar. G yarışçısının hızı 13 km/saat'dir. İki yarışçının bitim noktasına uzaklıkları eşit olduğu anda, aralarındaki uzaklık 16 km.dir. Aralarındaki uzaklık 17km/saat hızla azalıyor. Yarışı hangisi kazanacaktır?

   Çözüm: G yarışçısının bitim noktasına uzaklığı x, D yarışçısının y olsun. Aralarındaki uzaklık bir dik üçgenin hipotenüsüdür ve $d^2 = x^2 + y^2$ dir. Uzaklığın türevini alırsak, $dd' = xx' + yy'$ dür. $x = y$ olduğunda $d = 16$ veriliyor. O anda uzaklık formülünden $x = y = \frac{16}{\sqrt{2}}$ ve türev formülünden $y' = 13 - 17\sqrt{2} \approx -11 km/saat$ bulunur. $y' < x'$ olur. O halde G yarışçısı daha hızlıdır ve yarışı kazanacaktır.

28 Belirsiz İntegral

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihsiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

28.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri

Temel Formüller: Aşağıdki formüllerde u = u(x) fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin dve sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

1. $\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{u} \, du = ln|u| + C,$
3. $\int u dv = uv - \int v du$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
4. $\int \frac{1}{au+b} \, du = \frac{1}{a} ln|au+b| + C$

28.1 Değişken Değiştirme

Belirsiz integral verildiği biçemde bilinen integral formüllerinden hiç birisine benzemiyorsa, bazen uygun bir değişken değişimi ile bilinen formüllerden birisine dönüştürülebilir. Bu eylemin genel yöntemi şöyledir: $x = g(t)$ konumu yapılırsa, $dx = g'(t)dt$ olacağı düşünülürse,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \tag{28.1}$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı bilinen integral formüllerinden birisine benziyorsa, eşitliğin sağ yanı hesaplanabilir. Sonra asıl x değişkenine dönmek için $t = g^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu kullanmak gerekir. Dikkat edilirse, bu sonuç zincir theoremına benziyor.

(28.1) formülü ile belirli integral değerleri de bulunabilir:

Teorem 28.1. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $g(t)$ fonksiyonu $\alpha \le g(t) \le \beta$ için sürekli ve $g'(t)$ türevi de sürekli ise $a = g(\alpha)$ ve $b = g(\beta)$ ise ya da buna denk olarak $\alpha = g^{-1}(a)$ ve $\beta = g^{-1}(b)$ ise,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(g(t))g'(t)dt \tag{28.2}$$

olur.

Belirli integral için var olan theoremlar, Teorem **??** ve Teorem **??** yardımıyla belirsiz integrallere kolayca uygulanabilir.

Aşağıdakiler değişken değiştirimini gösteren örneklerdir.

Örnek 28.2.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}, \qquad (t = x^2+1,\ du = 2xdx)\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \ln\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

Örnek 28.3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(2\ln x)}{x}dx &= \frac{1}{2}\int \sin t dt, \qquad (t = 2\ln x,\ dt = \frac{2}{x}dx,\ dx = \frac{x}{2}dt)\\ &= -\frac{1}{2}\cos t + C\\ &= -\frac{1}{2}\cos(2\ln x) + C\end{aligned}$$

Örnek 28.4.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x+1}\, e^x dx &= \int t^{1/2}dt, \qquad (t = e^x+1,\ dt = e^x dx,\ dx = e^{-x}dt)\\ &= \frac{2}{3}t^{3/2} + C\\ &= \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Örnek 28.5.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx &= \int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx\\ &= \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}dx\\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad [t = e^-x,\quad dt = -e^{-x}dx]\\ &= -\sin^{-1} t + C\\ &= -\sin^{-1}(e^{-x}) + C\end{aligned}$$

Örnek 28.6.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{5+4x+x^2}dx &= \int \frac{dx}{1+(x+2)^2}dx \\
&= \int \frac{du}{1+u^2}du, \qquad [u=(x+2), \quad du=dx] \\
&= \tan^{-1} u + C \\
&= \tan^{-1}(x+2) + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.7.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx &= \int_1^2 \sin t dt, \qquad \left[t=\sqrt{x+1}, \quad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}\right] \\
&= 2\int_1^2 \sin t dt, \qquad [x=0 \Rightarrow t=1, \quad x=3 \Rightarrow t=2] \\
&= -2\cos u|_1^2 \\
&= 2(cos 1 - \cos 2)
\end{aligned}$$

28.2 Trigonometrik İntegraller

Örnek 28.8.

$$\begin{aligned}
\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx, \qquad (t=\cos x, \ \ dt=-\sin x dx) \\
&= -\int \frac{dt}{t} + C \\
&= -\ln|t| + C \\
&= -\ln|\cos x| + C \\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C \\
&= \ln|sec x| + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.9.

$$\begin{aligned}
\int \cot x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx, \qquad (t=\sin x, \ \ dt=\cos x dx) \\
&= \int \frac{dt}{t} + C \\
&= \ln|t| + C \\
&= \ln|\sin x| + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.10.

$t = (\sec x + \tan x)$, $dt = \sec x \tan x + \sec^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx, \\
&= \int \frac{sec^2 x + \sec x \tan x + sec^2 x}{sec x + \tan x} dx + C \\
&= \int \frac{dt}{t} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \ln|t| + C \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 28.11.

$t = (\csc x + \cot x)$, $dt = -(\csc x \cot x + \csc^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
\int \csc x dx &= \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx \\
&= \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} + C \\
&= \int -\frac{dt}{t} \\
&= -\ln|t| + C \\
&= -\ln|\csc x + \cot x| + C
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 28.12.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
\int \sin^m x . \cos^n x dx &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\
&= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx \\
&= \int (t^n (1 - t^2)^k dt + C
\end{aligned}
$$

çıkar. $(1 - t^2)^k$ binoma göre açılabilir ve sonuç t ye göre bir polinom olur. Polinom terim terime integrallenebilir. Sonra istenirse $\sin x$'e dönüşüm yapılabilir. Bunu bir örnekle açıklamak daha kolay olacaktır.

Örnek 28.13.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x . \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x (\cos^2 x) \cos x dx \\
&= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx, \qquad (t = \sin x,\ dt = \cos x dx) \\
&= \int (t^2 - t^4) dt + C \\
&= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\
&= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C
\end{aligned}
$$

Örnek 28.14.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x.\cos^8 x dx &= \int \sin^2 x(\cos^8 x)\sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^8 x \sin x dx, \qquad (t=\cos x,\ \ dt=-\sin x dx) \\
&= \int (1-t^2)t^8 dt + C \\
&= \int (t^8 - t^{10})dt \\
&= \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{11}t^{11} + C \\
&= \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.15.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx, \qquad [\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C \\
&= \frac{1}{2}(x - \sin x.\cos x) + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.16.

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx, \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x)dx, \qquad [\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

28.3 *Ters Trigonometrik Konumlar*

Çok kullanışlı bazı ters trigonometrik konumlar (değişken değiştirimi),

$$x = a\sin\theta, \quad x = a\tan\theta, \quad x = a\sec\theta$$

fonksiyonları ile yapılır. Bunların karşıt fonksiyonları

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

dır.

Teorem 28.17.

İntegrali alınacak ifade $\sqrt{a^2-x^2}$, $(a>0)$ terimi içeriyorsa, $x = a\sin\theta$ ya da ona denk olarak $\theta = \sin^{-1}(\frac{x}{a})$ konumu yapılır.

Örnek 28.18.

a yarıçaplı bir disk içinde $b < a$ olmak üzere $[b, a]$ aralığına düşen daire kesmesinin A alanını bulunuz.

Çözüm: dairede simetriyi kullanırsak, sözkonusu alan I.bölgedeki alanın iki katı olacaktır. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
A = \int_b^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_b^a (a^2 \cos\theta) d\theta, \qquad & [x = a\sin\theta, \ dx = a\cos\theta d\theta] \\
= a^2 (\theta + \sin\theta . \cos\theta)\Big|_{x=b}^{x=a} & \\
= a^2 \left(\sin^{-1}(\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \right)\Bigg|_{x=b}^{x=a} & \\
= \frac{pi}{2} a^2 - a^2 \sin^{-1}(\frac{b}{a}) - b\sqrt{a^2 - b^2} &
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 28.19.

$$
\begin{aligned}
A = \int \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}} dx = \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta} d\theta, \qquad & [x = 3\tan\theta, \ dx = 3\sec^2\theta d\theta] \\
= \int \sec\theta d\theta & \\
= \ln|sec\theta + \tan\theta| + C & \\
= \ln\left| \frac{\sqrt{9 + x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C & \\
= \ln\left(\sqrt{9 + x^2} + x \right) + C_1, \qquad & [C_1 = C - \ln 2]
\end{aligned}
$$

çıkar.

28.4 Çözümlü Problemler

1.
$$\int dx = x + C$$

2.
$$\int k \, dx = kx + C$$

3.
$$\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

4.
$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

5.
$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

6.
$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

7.
$$\int x^2(1-x^3)^5\,dx = -\frac{1}{18}x^3(x^3-2)(x^6-3x^3+3)(x^6-x^3+1)+C$$

8.
$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,dx = x sinh^{-1}(x)-\sqrt{x^2+1}+C$$

9.
$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2-\ln(x^2+1)\right)+C$$

10.
$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1}+C$$

11.
$$\int xe^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1)+C$$

12.
$$\int x(x-1)^6\,dx = \frac{1}{8}x^8-\frac{6}{7}x^7+\frac{5}{2}x^6-4x^5+\frac{15}{4}x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^2+C$$

13.
$$\int \frac{1}{5x+3}\,dx = \frac{1}{5}\ln(5x+3)+C$$

14.
$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$t=\sqrt{x}$ değişken değiştirimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
t=\sqrt{x} &= \\
dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt \\
x &= t^2 \Rightarrow x+1 = t^2+1 \\
x &= 4 \mapsto t=2 \\
x &= 9 \mapsto t=3
\end{aligned} \tag{28.3}$$

değişken değiştirimi yapılınca,

$$\begin{aligned}
\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx &= \int_2^3 \frac{t^2+1}{t^2+2t-3} \\
&= \int_2^3 \frac{2t^3+2t}{t^2+2t-3}dt \\
&= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{16t-12}{(t-1)(t+3)}\right)dt \\
&= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{1}{t-1}+\frac{15}{t+3}\right)dt \\
&= t^2-4t+\ln|t-1|+15\ln|t+3||_2^3 \\
&= [9-12+\ln 2+15\ln 6]-[4-8+0+15\ln 5] \\
&= \ln 2+15\ln 6+15\ln 3-15\ln 5+1 \\
&= \ln 2+15\ln 6-15\ln 5+1
\end{aligned}$$

İstenirse, 5. eşitlikten sonra t değpişkeninden tekrar x değişkenine dönüşüm yapılabilir

$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx = x-4\sqrt{x}+\ln|\sqrt{x}+3||_4^9$$
$$= \ln 2 + 15\ln 6 - 15\ln 5 + 1$$

bulunur.

15.
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu problemi çözmek için önce (28.4) eşitsizliğinin varlığını göreceğiz.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx \le \lim_{n\to\infty}\lim\int_0^{2\pi} \frac{1}{x^2+n^2} = 0 \qquad (28.4)$$

Sonra Teorem **??**-10.'yu kullanacağız:

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\,dx \qquad (28.5)$$
$$\le \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2}\,dx \qquad (28.6)$$
$$= \frac{2\pi}{n^2} \qquad (28.7)$$

Bu eşitsizliklerden limite geçersek,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx \le \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^2} = 0$$

çıkar.

16.
$$\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+3x-5)d(x^2+3x-5)$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2+3x-5)+C$$

17.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x^2-x)}}\,dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx, \quad t=(x-\frac{1}{2}) \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-t^2}}\,dt \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{t}{5/2}\right)+e \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right)+e
\end{aligned}$$

18.

$$\int_0^1 x\ln(x+3)\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$t=\ln(x+3)$ konumu yapılırsa $dv = x\,dx$, $dt=\frac{dx}{x+3}$, $v=\frac{x^2}{2}$ olur. Bunlar kısmi integral formülünde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int x\ln(x+3)\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+3}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-3x+9\ln(x+3)\right)+C
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 x\ln(x+3)\,dx = \frac{5}{4}-\ln 4+\frac{9}{2}\ln 3$$

bulunur.

19.

$$\int e^{x/2}\sin(ax)\,dx = \frac{1}{(a^2+\frac{1}{4})}\,e^{x/2}\left(\frac{\sin(ax)}{2}-a\cos(ax)\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

20.

$$\int \frac{1}{(3\cos x+5)}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\frac{x}{2}}{2}\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

21.

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

22.
$$\int x \sin x \, dx = \sin x x \cos x + C$$

23.
$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x} + C$$

24.
$$\int \csc(3x)\sec(3x) \, dx = \frac{1}{3}(\ln(sin(3x)) - \ln(\cos(3x))) + C$$

25.
$$\int \frac{1}{1+x^3} \, dx = \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

26.
$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} \, dx = -2\sqrt{4-x} + C$$

27.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} \, dx = -\frac{2x}{\sqrt{x^3}} + C$$

28.
$$\int 2\sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

29.
$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x} \, dx = \tan^{-1}(e^x)} + C$$

Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \frac{1}{(au+b)^2} \, du = -\frac{1}{u+a} + C, \quad (au + b \neq 0)$
2. $\int (u+b)^n \, du = \frac{1}{n+1}(u+a)^{n+1} + C,$
3. $\int u(u+a)^n \, du = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(u+a)^{n+1}((n+1)u - a) + C,$
4. $\int \frac{1}{1+u^2} \, du = tan^{-1} u + C$
5. $\int \frac{1}{a^2+u^2} \, du = \frac{1}{a} tan^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\frac{1}{a} cot^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
6. $\int \frac{1}{u^2-a^2} \, du = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
7. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} tan^{-1}(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}) + C$
8. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{2a} ln|ax^2 + bx + c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} tan^{-1} \frac{ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

Köklü İfadelerin İntegralleri:

1. $\int \sqrt{x-a} \, dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} + C$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} \, dx = 2\sqrt{x \pm a} + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} \, dx = -2\sqrt{a-x} + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \, du = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\cos^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}} \, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

7. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}\, du = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+\sqrt{a^2 \pm u^2}} \right| + C$
8. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, dx = \frac{1}{a} \cos^{-1}(\frac{u}{a}) = \frac{1}{a} \sec^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
9. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$
10. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$
2. $\int \cos u\, du = \sin u + C$
3. $\int \tan u\, du = \ln|\sec u| + C = \ln|\cos u| + C$
4. $\int \cot u\, du = \ln|\sin u| + C$
5. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C = \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$
6. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$
7. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$
8. $\int \csc u \tan u\, du = \sec u + C$
9. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

Hiperbolik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sinh u\, du = \cosh u + C$
2. $\int \cosh u\, du = \sin u + C$
3. $\int \tanh u\, du = \ln|\cosh u| + C$
4. $\int \coth u\, du = \ln|\sinh u| + C$
5. $\int sech(u)\, du = \tanh^{-1}(\sinh u) + C$
6. $\int csch(u)\, du = -\coth^{-1}(\cosh u) + C$
7. $\int sech^2(u)\, du = \tanh u + C$
8. $\int csch^2(u)\, du = -\coth u + C$
9. $\int sech(u) \tanh u\, du = -sech(u) + C$
10. $\int csch(u) \coth u\, du = -csch(u) + C$

Üstel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int e^{ku}\, du = \frac{1}{k} e^{ku} + C$
2. $\int a^u\, du = \frac{1}{\ln a} a^u + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
3. $\int u a^{ku}\, du = \frac{1}{k \ln a} a^{ku} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
4. $\int u^2 a^{ku}\, du = a^{ku} \left(\frac{u^2}{k} - \frac{2u}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right) + C$
5. $\int \frac{e^{kx}}{x}\, dx = \ln u + \sum_{n=1}^{infty} \frac{(kx)^n}{n.n!}$

6. $\int e^{au} \sin bu \; du = \frac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu}{)} a^2 + b^2 + C$

7. $\int e^{au} \cos bu \; du = \frac{e^{au}(a \cos bu - b \sin bu)}{a^2+b^2} + C$

Logaritmik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \ln(kx) \; dx = x \ln(kx) - x + C$

2. $\int \ln(ax+b) \; dx = x \ln(ax+b) - x + \frac{b}{a} \ln(ax+b) + C$

3. $\int (\ln x)^2 \; dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

4. $\int (\ln(kx))^n \; dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln(kx))^{n-1} \; dx + C$

5. $\int \frac{1}{\ln x} \; dx = \ln|\ln x| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n.n!} + C$

6. $\int x^m . \ln x \; dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \qquad (m \neq 1)$

7. $\int \frac{1}{x[\ln(x)]^n} \; dx = \frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$

8. $\int \ln(x^2 + a^2) \; dx = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \tan^{-1}(\frac{x}{a}) + C$

9. $\int \sin(\ln x) \; dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$

10. $\int \cos(\ln x) \; dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$

28.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri

28.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse

$y = \ln u \Longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{u'(x) dx}{u(x)} = \ln|u(x)| + C$$

yazabiliriz. Bazen uygun değişken değiştirimi ile integrali alınacak fonksiyon bu biçeme sokulabilir.

Örnekler:

1. $y = \ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

yazabiliriz.

2. İntegrali alınacak fonksiyon $\frac{1}{x-a}$ biçiminde ise, onun $\ln|x-a| + C$ foksiyonunun türevi olduğunu biliyoruz.

$$\int \frac{1}{x-2} dx \tag{28.8}$$

integralini hesaplamak için $w = x-2, \; dw = dx$ konumu yapılısa,

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{1}{w} dw = \ln|w| + C = \ln|x-2| + C$$

bulunur.

3. Paydanın türevi paya eşitse, bir değişken değiştirimi ifadeyi $\frac{dw}{u}$ biçimine dönüştürür.

$$\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr$$

integralini hesaplamak için

$$w=r^3-3r^2+1, \qquad dw=(3r^2-6r)dr=3(r^2-2r)dr$$

konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{w}dw\\ &= \frac{1}{3}\ln|w|+C\\ &= \frac{1}{3}\ln|r^3-3r^2+1|+C\end{aligned}$$

bulunur.

4. Çoğunlukla payda'nın türevi paya eşit olmaz. Bu durumlarda da değişken değiştirimi bazen işe yarayabilir.

$$\int \frac{s+2}{s+3}ds$$

integralini hesaplamak için $w=s-3, \quad dw=ds$ konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{s+2}{s+3}ds = \int \frac{w+5}{w}dw &= \int \left(1+\frac{5}{w}\right)dw\\ &= w+5\ln|w|+C\\ &= s-3+5\ln|s-3|+C\end{aligned}$$

bulunur.

28.5.2 Basit Kesirlere ayırma

Teorem 28.20. *$\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu için, payın derecesi paydadınkinden küçük ve paydanın baş katsayısı 1 olsun. Payda*

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

gibi doğrusal çarpanlarına ayrılabiliyorsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_1}{x-a_2}+\dots+\frac{A_1}{x-a_n} \tag{28.9}$$

biçeminde yazılabilir.

Bu teoremin formal ispatını vermeye gerek kalmadan, integral hesabında gerekli olacağı için $A_1, A_2, \dots, A_n$ katsayılarının hesaplanışını göstereceğiz. O eylem ispat yerine geçecektir. Bunun için yapılacak iş basittir. (28.9) ifadesinin sağ yanındaki terimlerin paydalarını eşitleyip ortak payda altında toplarız. Sağ tarafın payına gelecek olan polinoma $S(x)$ dersek, (28.9) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} \tag{28.10}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan $P(x) \equiv S(x)$ olması gerektiği çıkar. Bu özdeşlikte eşit dereceli terimlerin katsayılarını eşitleyerek istenen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ katsayıları hesaplanabilir.

Katsayıları kolay hesaplamaya yarayan başka pratik bir yöntem de şöyledir: (28.9) eşitliğinin iki yanını herhangi bir $(x - a_j)$ ile çarpıp $x \to a_j$ iken limiti hesaplayalım: Her $(1 \leq j \leq n)$ için,

$$A_j = \lim_{x \to a_j} (x - a_j)\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a_j)}{(a_j - a_1)(a_j - a_2)\ldots(a_j - a_n)} \tag{28.11}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte paydası $(x - a_j)$ olan terime karşılık gelen A_j katsayısı bulunmuş olur. Her $(1 \leq j \leq n)$ için bu eylem yapılırsa, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ katsayıları hesaplanmış olur. Bu işleme dikkat edersek, yapılan iş,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)} \tag{28.12}$$

eşitliğinin sağ yanında paydadaki $(x - a_j)$ çarpanını yok sayıp geride kalan ifadede x yerine a_j koymaktan ibarettir. Katsayıların hesaplanmasında bu oldukça kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

Örnekler: Bazen paydayı çarpanlarına ayırmak integral işlemini basitleştirir.

5.

$$\int \frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} dx \tag{28.13}$$

integralini hesplamak için, ifadeyi basit kesirlerine ayıracağız.

$$\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} \tag{28.14}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \tag{28.15}$$

$$= \frac{Ax - 3A + Bx - 2B}{(x-2)(x-3)} \tag{28.16}$$

$$\Longrightarrow (A+B) = 1, \qquad -3A - 2B = 4 \tag{28.17}$$

$$\Longrightarrow a = -6, \quad B = 7 \tag{28.18}$$

olur. Buradan,

$$\int \frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} dx = -6\int \frac{1}{x-2} dx + 7\int \frac{1}{x-3} dx \tag{28.19}$$

$$= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C \tag{28.20}$$

çıkar.

6.

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)} dx = \frac{A}{x-2} + \frac{A}{x+2} + \frac{A}{x-5}$$

$$= \frac{104}{84(x-5)} + \frac{35}{x-2} + \frac{15}{x+2}$$

yazılabilir. Buradan

$$\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)}dx = \int \frac{104}{84(x-5)} + \int \frac{35}{x-2} + \int \frac{15}{x+2}$$
$$= \frac{1}{84}(104\ln|x-5| - 35\ln|x-2| + 15\ln|x+2| + C$$

bulunur.

7. Payın derecesi paydanınkinden büyükse, önce bölme işlemi yapılır, sonra yukarıdaki yönteme başvurulur:

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx$$

integralini hesaplamak için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^3-4}{x^2-x-2} = (x+2) + \frac{9x+2}{x^2-x-2}$$

olduğundan

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx = \int (x+2)dx + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx$$

yazılabilir. Sağdaki integrali hesaplamak için,

$$\frac{9x+2}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$
$$\Longrightarrow A = \frac{7}{3},\ B = \frac{20}{3}$$

olduğu düşünülürse,

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C_2$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x + + \frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C, \qquad (C = C_1 + C_2)$$

bulunur.

8.

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx = \int \left(1 + \frac{x+2}{x^3-x}\right)dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x}dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yandaki integral içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$
$$= \frac{A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ -A = 2 \end{cases}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = -2$, $B = 3/2$, $C = 1/2$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx &= x - 2\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C\end{aligned}$$

çıkar.

9. Paydanın bir yada iki dereceli bir çarpanı m kez tekrar ediyorsa, onu kesirlerine ayırırken söz konusu çarpan için, dereceleri 1 den m ye kadar değişen terimler eklenir.

Örnek 28.21.

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2}$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A + B + & = 0 \\ -2A - B + C & = 0 \\ A & = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2} &= \int \frac{1}{x}dx \ - \int \frac{1}{x-1}dx \ + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

çıkar.

28.5.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa

Payda'da $ax^2 + bx + c$ gibi ikinci dereceden bir çarpan var ve $b^2 - 4ac < 0$ ise o çarpana ait gerçel kök yoktur. Basit kesirlere ayırırken ona ait terimi $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ biçiminde yazarız. Tabii, aynı düşünceyi

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx, \ \int \frac{x}{x^2+a^2}dx, \ \int \frac{1}{x^2-a^2}dx, \ \int \frac{x}{x^2-a^2}dx$$

tipi integrallerin hepsine uygulayabiliriz. Sonuçlar daima,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan -1\left(\frac{x}{a}\right) + C \tag{28.21}$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C \tag{28.22}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C \tag{28.23}$$

$$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C \tag{28.24}$$

formüllerine indirgenebilir.

Örnekler

1.

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3+x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx = \int \left(\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\
&= \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x-1)(x+1)} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B &= 1 \\ C &= 3 \\ A &= 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 2,\ B = -1,\ C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1} + 3\int \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\tan^{-1}x + C
\end{aligned}$$

çıkar.

2.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \int \left(\frac{1}{(x-a)(x+a)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a)} + \frac{B}{x+a} \\
&= \frac{Ax+Aa+Bx-Ba}{(x^2-a^2} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B &= 0 \\ Aa-Ba &= 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/(2a),\ B = -1/(2a)$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}dx \\
&= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C \\
&= \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

3. Bazen uygun bir değişken değiştirimi ile payda'nın türevi paya eşitlenebilir.

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5 44x^3+x}dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx = \int \left(\frac{x^2+2}{x((2x^2+1)(2x^2+1)^2}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2} \\
&= \frac{A(4x^2+4x+1)+B(2x^4+x^2)+C(2x^3+x)+Dx^2+Ex}{4x^5+4x^3+x} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 4A+2B & =0 \\ 2C & 0 \\ 4A+B+D & =1 \\ A & =2 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=2$, $B=-4$, $C=0$ $D=-3$, $E=0$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx &= 2\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{xdx}{2x^2+1} - 3\int \frac{xdx}{(2x^2+1)^2} \\
&= 2\ln|x| - \int \frac{du}{u} - \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2}, \qquad (u=2x^2+1) \\
&= 2\ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C \\
&= 2\ln\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right) + \frac{3}{4}\ \frac{1}{2x^2+1} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

4.

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \\
&= \frac{A(x^2-x+1)+B(x^2+x)+C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B & =0 \\ -A+B+C & =0 \\ A+C & =1 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/3$, $B = -1/3$, $C = 2/3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.22.

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{3dx}{3x-4}$	2. $\int \frac{dx}{3-5x}$
3. $\int \frac{xdx}{\pi x-3}$	4. $\int \frac{x^2dx}{x-3}$
5. $\int \frac{dx}{x^2-4}$	6. $\int \frac{dx}{3-x^2}$
7. $\int \frac{x^2}{x^2+2x-2}$	8. $\int \frac{xdx}{3-x^2}$
9. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$	10. $\int \frac{1}{a^2-b^2x^2}dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{x-3}{x^2+x}dx$	2. $\int \frac{1}{9x+x^3}dx$
3. $\int \frac{1}{9x^2-6x+2}dx$	4. $\int \frac{x}{2+6x+9x^2}dx$
5. $\int \frac{1+x^2}{9x^2-6x}$	6. $\int \frac{1+x^3}{x^2+7x+12}dx$
7. $\int \frac{x^3}{x^3-a^3}$	8. $\int \frac{dx}{2x+2x^2+x^3}$
9. $\int \frac{1}{x^4-3x^3}$	10. $\int \frac{x}{1-x+x^2}dx$

Karma problemler

1. Aşağıdaki integral formüllerini doğruluğunu sağlayınız.

Örnek 28.23.

$$\int \frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Örnek 28.24.

$$\int \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}C$$

Örnek 28.25.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

Örnek 28.26.

$$\int \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2\tan x se^2 x + C$$

Örnek 28.27.

$$\int x(a^x)dx = \frac{a^x(\ln a - 1)}{\ln^2 a} + C$$

Örnek 28.28.

$$\int x(\sinh x)dx = x(\cosh x) + \sinh x + C$$

Örnek 28.29.

$$\int \sin\sqrt{x}dx = 2(\sin\sqrt{x} - 2\cos\sqrt{x} + C$$

Örnek 28.30.

$$\int \sin^{-1}(\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}(\sqrt{-(x-1)x} + \sin^{-1}(\sqrt{x}) + C$$

Örnek 28.31.

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x})dx = (x+1)tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$$

Örnek 28.32.

$$\int x\ln x = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

2. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

Örnek 28.33.

$$\int \frac{x^2-5x-9}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \left\{\frac{1}{6}(-13\ln(x-1)+9\ln(x+1)+10\ln(x+2))\right\}+C$$

Örnek 28.34.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\\ &= \frac{A(x+2)^2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1}\\ &\Longrightarrow \begin{cases} A & =4\\ A+B & =3\\ B= & =3-A=3-4=-1\\ C & =3\end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=4$, $B=-1$, $C=3$ bulunur.
O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{3dx}{(x+2)^2}\\ &= 4\ln|x-1|-\ln|x+2|+3\int(x+2)^{-2}dx+C\\ &= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|}+\frac{3(x+2)^{-1}}{-1}+C\\ &= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|}-\frac{3}{x+2}+C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.35.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\\ &= \frac{A(x+2)^2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1}\\ &\Longrightarrow \begin{cases} A & =4\\ A+B & =3\\ B= & =3-A=3-4=-1\\ C & =3\end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=4$, $B=-1$, $C=3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3\int (x+2)^{-2}dx + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.36.

$$\begin{aligned}
\int (1-3x)^5 dx &\Longrightarrow t = 1-3x,\ dt = 3dx \\
&= \int t^5 (\frac{-1}{3} dt \\
&= \frac{-1}{3}\frac{1}{6}t^6 \\
&= \frac{-1}{18}(1-3x)^6 + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.37.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\ln x+4)^3}{x}dx &\Longrightarrow t = \ln x + 4,\ dt = \frac{1}{x}dx \\
&= \int t^3 dt \\
&= \frac{1}{4}t^4 \\
&= \frac{1}{4}(\ln x+4)^4 + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.38.

$$\begin{aligned}
\int a^x dx &\Longrightarrow t = a^x \Rightarrow t = e^{x\ln a}, \\
&= \int e^{x\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}e^{x\ln a} + C \\
&= \frac{1}{\ln a}a^x + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.39.

$$\begin{aligned}
\int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &\Longrightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt, \\
&= 2\int a^t dt \\
&= \frac{2}{\ln a}a^t + C \\
&= \frac{2}{\ln a}a^{\sqrt{x}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.40.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{1+x^8}dx &\Longrightarrow t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3 dt,\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2}dt\\ &= \frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)+C\end{aligned}$$

Örnek 28.41.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx \Longrightarrow \int \frac{du}{u} &= \ln|u|+C\\ &= \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}dx\\ &= \ln|\sin x+\cos x|+C\end{aligned}$$

Örnek 28.42.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\cos^5 x}\,\sin x dx &\Longrightarrow t=\cos x,\ dt = -\sin x dx\\ &= -\int \sqrt{t^5}dt\\ &= -\int t^{5/2}dt\\ &= -\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}+C\\ &= -\frac{2}{7}(\cos^{\frac{7}{2}} x+C\end{aligned}$$

Örnek 28.43.

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{x-3}\,dx &\Longrightarrow t^2 = x-3,\ 2tdt = dx,\ x = t^2+3\\ &= \int (t^2+3)^3.t.(2tdt), \qquad [(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3]\\ &= 2\int (t^8+9t^6+27t^4+27t^2)dt\\ &= \frac{2}{9}t^9+\frac{18}{7}t^7+\frac{54}{5}t^5+\frac{54}{3}t^3+C\\ &= \frac{2}{9}(x-3)^{\frac{9}{2}}+\frac{18}{7}(x-3)^{\frac{7}{2}}+\frac{54}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+18(x-3)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

Örnek 28.44.

$ekok\{4,\,5\} = 20 \Rightarrow t^{20} = x+1,\ 20t^{19}dt = dx,\ x = t^{20}-1$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{3+\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx &= \int \frac{3+\sqrt[4]{t^{20}}}{\sqrt[5]{t^{20}}}(20t^{19}dt\\ &= \int \frac{3+t^5}{t^4}(20t^{19})dt\\ &= 20\int\left(t^{20}+\frac{3t^{19}}{t^4}\right)dt\\ &= \frac{20}{21}t^{21}+\frac{15}{4}t^{16}+C\\ &= \frac{20}{21}(x+1)^{\frac{21}{20}}+\frac{15}{4}(x+1)^{\frac{4}{5}}+C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 28.45.

$u = x,\ dv = e^x dx,\ du = dx,\ v = e^x,\ \int u\,dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx\\ &= xe^x - e^x + C\\ &= e^x(x-1)\end{aligned}$$

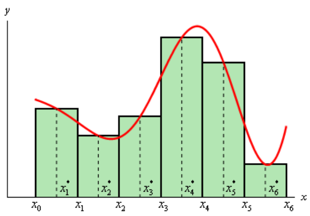
bulunur.

Örnek 28.46.

$u = x^2,\ dv = e^x dx,\ du = 2xdx,\ v = e^x,\ \int u\,dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx\\ &= x^2e^x - 2e^x(x-1)+C\\ &= e^x(x^2-2x+2)+C\end{aligned}$$

bulunur.


Şekil 28.1: Düzlemsel bölgenin alanı

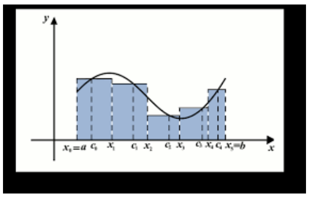
28.6 *Belirli İntegral*

Düzlemde kare, dikdörtgen, üçgen, çember gibi iyi bilinen geometrik şekillerin alanlarını bulmak için uygun formüller kullanıyoruz. Ama, uygulamada alanını bilmek isteyeceğimiz düzlemsel alanlar, yukarıda sayılan şekillerden hiç birisine benzemeyebilir. Üstelik bunların sayısı bilinen geometrik şekillerden daha çoktur.

Bilimin her alnında olduğu gibi, matematik de theoremları genişletme ve mümkünse genelleştirme peşindedir. Belirli integral bu gereksemeden doğmuştur. İlk genelleşme, bilinen geometrik şekiller yerine, bilinen fonksiyonlarla sınırlanmış düzlemsel bölgelerin alanlarının hesaplanması işidir. Daha sonra çok boyutlu uzaylarda yüzey alanlarını bulmaya genişletilmiştir. Ayrıca, fizikte farklı amaçlarla kullanılmaya başlanmıştır.

Şimdi bir $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunu düşünelim. Ox- ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alanı hesaplamak isteyelim. Genişleme için daima iyi bildiğimiz kavramlara dayanırız. Dikdörtgenin alanını iyi bildiğimize göre, söz konusu dülemsel alanı dikdörtgenlere ayırmaya çalışalım. Tabii, y=f(x) fonksiyonu Ox-eksenine paralel bir doğru değilse, dikdörtgenlerin alanlarının toplamı ancak gerçek alanın yaklqaşık bir değeri olur. Şimdi bunu geometrik olrak açıklayalım:

nın yaklaşık



Önce, f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerinde pozitif değerler aldığını varsayalım. $[a, b]$ aralığını, eşit olması gerekmeyen alt aralıklara bölelim:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{28.25}$$

Her $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında bir c_i noktası seçelim. $f(c_i) = yi$ diyelim. Ox-ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alan, yaklaşık olarak tabanı $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ve yüksekliği $y_i = f(c_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olan dikdörgenlerin alanları toplamına eşittir. Bunu şöyle ifade edelim:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \ldots + y_n \Delta x_n \tag{28.26}$$

(**??**) ifadesine $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü (partition), (28.26) toplamına da bu parçalanışa ait Riemann toplamı denilir. Ayrıntıya girmeden, f nin belirli koşulları sağlaması durumunda, en büyük Δx_i uzunluğu sıfıra yaklaşırken (28.26) toplamının varlığını söyleyeceğiz:

$$\lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0} s_n = \lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i \tag{28.27}$$

Tabii, $\lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0}$ olduğunda alt aralıkların sayısı sonsuz olur ve her bir alt aralığın uzunluğu sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla, (28.27) toplamı bir sonsuz serinin toplamına dönüşür.

28.7 Belirsiz İntegral Kuralları

Teorem 28.47. *$f(x)$ ile $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, $k \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ise, aşağıdaki bağıntılar vardır:*

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
2. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, *(k sabit sayı)*
3. $\int_a^b k f(x) dx \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx, \quad (c \in [a, b])$

4. $\int_a^b k dx = k(b-a)$

5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

6. $\int_a^a f(x)dx = 0$,

7. $x \in [a,b]$ *ve* m, M *sabit sayılr olmak üzere* $m \leq f(x) \leq M$ *ise*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a<b)$

9. $x \in [a,b]$ *için* $f(x) \geq 0$ *ise* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

10. $x \in [a,b]$ *için* $g(x) \geq f(x)$ *ise* $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

28.8 Calculus'un Birinci Temel Teoremleri

28.8.1 Calculus'un 1.Teoremi

Teorem 28.48. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise;*

$F(x) = \int_a^b f(x)dx, \quad x \in [a,b]$

foksiyonu (a,b) aralığında süreklidir, türetilebilir ve

$F'(x) = f(x) \quad x \in (a,b)$

eşitliği sağlanır.

28.8.2 Calculus'un İkinci Temel Teoremi

Teorem 28.49. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, yukarıdaki gösterimler altında,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{28.28}$$

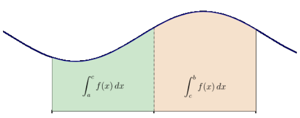
dır.

Örnek 28.50.

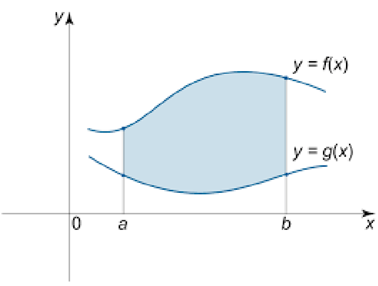
$y = f(x),\ Ox,\ x = a,\ x = b$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan,

$$\int_a^b f(x)dx \tag{28.29}$$

belirli integrline eşittir.



Şekil 28.3: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması



Şekil 28.4: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması

Örnek 28.51.

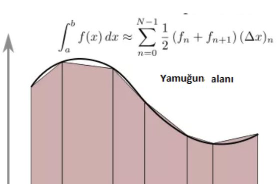
$y = 2x$ eğrsi, Ox doğrusu, $x = 1$ ve $x = 2$ doğrularının sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.

$$A = \int_1^2 2x dx \tag{28.30}$$

$$= x^2\big|_1^2 \tag{28.31}$$

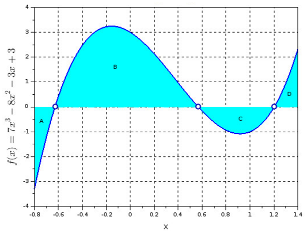
$$= 2^2 - 1 = 3 \tag{28.32}$$

$$A = \frac{2+4}{2} \times 1 = 2 \tag{28.33}$$



Aynı sonucu, Şekil 28.5'deki yamuğun alan formülü ile de bulabiliriz. Anımsayacağınız gibi, yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yarısının yüksekliği ile çarpımına eşittir.

Bazı aralıklarda $y = f(x)$ fonksiyonu negatif değerler alabilir. O zaman (28.26) Riemann toplamındaki negatif y_i ler için gikdörtgen alanları negatif olur. Oysa, düzlemsel alanın değeri daima pozitif olmalıdır.Negatif alan tanımmlı değildir. O nedenle, negatif alanları pozitif yapmalıyız. Bunu yapmak için fonksiyonun negatif değerler aldığı aralıkları saptar ve onlar için bulduğumuz belirli integrali pozitif yaparız. Bu eylemi pratik bir formüle bağlamak da mümkündür:



Şekil 28.6: Negatif Alanlar

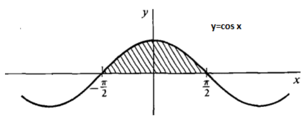
$$A = \int_a^b |f(x)|dx \tag{28.34}$$

Örnek 28.52.

eğrisi altında ve $[\frac{1}{2}, 1]$ alaığı üzerinde kalan alanı bulunuz. Verilen bölgede $y = \cos x$ fonksiyonu pozitif değerler aldığı için, istenen alan,

$$A = \int_{0.5}^{1} \cos x dx = \sin x|_{0.5}^{1} \tag{28.35}$$
$$= \sin(1) - \sin(0.5) \tag{28.36}$$
$$= 0.841 - 0.479 \tag{28.37}$$
$$= 0.362 \tag{28.38}$$

olur.



Şekil 28.7: $y = \cos x$ altındaki Alan

Örnek 28.53.

Yarıçapı $r = 3$ olan dairenin üst yarı düzlemdeki alanını bulunuz.

$$\begin{aligned}
\frac{A}{2} = \int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx &= \int 3\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt, \quad [x = 3\sin t, \quad dx = 3\cos t dt\,] \\
&= 9\int_0^{\pi/2} cos^2 t dt \\
&= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt \\
&= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\int \cos 2t\, dt \\
&= \frac{9}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{9}{2}\sin -1(1) \\
&= \frac{9}{2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}$$

olur.

Uyarı 28.54. *Aşağıdaki integral formülü kullanılırsa aynı sonuç elde edilir.*

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$$

Örnek 28.55.

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 = 9$$

Örnek 28.56.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (4x^3-9x^2)dx &= 4\int_0^2 x^3dx - 9\int_0^2 x^2dx\\ &= (x^4-3x^3)\big|_0^2\\ &= 2^4-3(2)^3\\ &= 1624 = -8\end{aligned}$$

Örnek 28.57.

$$\int_{-2}^0 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{8}(2x-1)^4\Big|_{-2}^0 = -78$$

Örnek 28.58.

$y = x^2-4x+5$ ile $y = 2x-3$ eğrileri arqasında kalan alanı bulunuz.

$$\begin{aligned}\int_1^3 [(x^2-4x+5)]dx &= \int_2^4 (-x^2-4x+5)dx\\ &= \frac{x^3}{3}-2x^2-5x)\Big|_1^3 \qquad = (\frac{64}{3}+48-32)\\ &= \frac{64}{3}\end{aligned}$$

Örnek 28.59.

$$\int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^3 = \frac{2^3}{\ln 2} = \frac{8}{\ln 2}$$

Örnek 28.60.

$$\int_0^{2\sqrt{2}} (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3}+x\Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{22\sqrt{2}}{3}$$

Örnek 28.61.

$y = 1-x^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} (1-x-x^2)dx = 5\frac{5}{6} = 1.86339$$

Örnek 28.62.

$y = 16x - 10x^2 + x^3$ ile $y = -16x + 10x^2 - x^3$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_0^2 (32x - 20x^2 + x^3)dx + \int_2^8 (32x - 20x^2 + x^3)dx = \frac{1136}{3} = 378.667$$

Örnek 28.63.

$y = |x|$ ile $y = 6 - x^2$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{-3}^3 (6 - x^2 + |x|)dx = 27$$

Örnek 28.64.

$[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde $y = \sin x$ ile $y = \cos x$ eğrileri arasında ve [kalan alanı bulunuz.

$$\int_0^{\pi/4} (\cos - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (-\cos + \sin x)dx = 2\sqrt{2} \approx 2.82843$$

28.9 Belirsiz İntegral

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihsiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

28.9.1 Belirsiz İntegral Formülleri

Temel Formüller: Aşağıdaki formüllerde u = u(x) fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin de sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

1. $\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{u} \, du = ln|u| + C,$
3. $\int udv = uv - \int vdu$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
4. $\int \frac{1}{au+b} \, du = \frac{1}{a} ln|au + b| + C$

Index