

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,
ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

1	<i>Analiz Öğretimi</i>	3
1.1	İki Milenyum Süren Sorunlar	21
1.2	Mantık ve Matematik	25
1.2.1	Tümdengelim	26
1.2.2	Tümevarım	27
1.3	Matematik Dili	30
I	Ön Bilgiler	31
2	<i>Ön Bilgiler (Pre Kalkülüs)</i>	3
2.1	Ön Kalkulus	33
3	<i>Önermeler Cebiri</i>	3
3.1	İki-değerli Mantık	35
3.2	Matematiksel Mantık	35
3.3	Boole Cebiri	36
3.4	Önermeler	36
3.4.1	Yalın Önermeler	37
3.4.2	Bileşik Önermeler	38
3.4.3	Denk Önermeler	38
3.5	Önermeler Cebiri	39
3.6	Operatörler	39
3.6.1	\wedge Operatörü	39
3.6.2	\vee Operatörü	40
3.7	Değilleme	40
3.7.1	Bir Önermenin Değili	40
3.7.2	İse Bağlacı	41
3.7.3	Koşullu Önerme Sonuçları	42
3.8	\vee Operatörünün Özellikleri	43
3.8.1	\vee 'nin Eşgüçlülüğü	43
3.8.2	\vee 'nin Yer Değişim Özeliği	43
3.8.3	\vee 'nin Birleşimi	43
3.9	Dağılma	44
3.10	Bileşik Önermelerin Değillenmesi	44
3.10.1	De Morgan Kuralları	44
3.11	\Leftrightarrow : Ancak ve Ancak Operatörü	45

3.12 Hepdoğru ve Hepyanlış	46
3.12.1 Karşıt Ters	49
3.12.2 Alıştırmalar	49
3.12.3 Alıştırmalar	54

4 Kümeler Cebiri 4

4.1 Kümeler Cebiri	55
4.1.1 Kapsama	55
4.1.2 Evrensel Küme	56
4.2 Venn Çizenekleri	56
4.2.1 Tümleyen Küme	56
4.2.2 Boş Küme	56
4.2.3 Tek ögeli küme	56
4.2.4 Eşit Kümeler	57
4.2.5 Has Alt Küme	57
4.2.6 Kuvvet Kümesi	57
4.2.7 Simetrik Fark	57
4.3 Bağıntılar	57
4.3.1 Kartezyen Çarpım	58
4.3.2 Grafik	58
4.3.3 Kartezyen Çarpımın zelikleri	59
4.4 Analitik Düzlem	59
4.5 Bağıntılar	59
4.5.1 Bağıntıların Gösterimi	59
4.5.2 Grafik	60
4.6 Bağıntı Türleri	60
4.7 Denklik Bağıntıları	60
4.7.1 Eşitlik	60
4.8 Denklik Bağıntısı Nedir?	61
4.8.1 Denk ğeler	61
4.9 Denklik Sınıfları	61
4.10 Ters Bağıntı	62
4.11 Simetrik Bağıntı	62

5 Sayılar 4

5.1 Sayıların Kuruluşu	65
5.2 Sayıların Sıralanması	66
5.3 Doğal Sayılar	67
5.4 Doğal Sayıların Kuruluşu	67
5.5 Peano Belitleri	67
5.6 Sonlu Tme Varım İlkesi	67
5.7 Nicelik Sayıları	67
5.8 Eşgçllk	68
5.9 Sayılabilirlik	69
5.10 Sayılamayan Sonsuz Kümeler	69
5.11 Gerçel Sayıların Tamlığı	70
5.12 Alıştırmalar	70

6 Rasyonel Üslü İfadeler 4

6.1	Tamsayı Üsler	71
6.1.1	Üslü İfadelerin Özellikleri:	71
6.1.2	Negatif Üsler	72
6.1.3	Benzer Üslü İfadeler	72
6.2	Rasyonel Kuvvetler	72
6.3	Üslü Denklemler	74
6.4	Aliştirmalar	74
6.5	Üslü Denklemler	75
6.6	Aliştirmalar	75
6.7	Köklü İfadeler	75
6.8	Aliştirmalar	78
6.9	e Sayısı	78
6.10	Analitik Geometri	80
6.11	n-sıralılar	80
6.12	Kartezyen Çarpım	81
6.12.1	İkili ve Çoklu sıralılar	81
6.12.2	n-sıralılar	82
6.13	Analitik Geometri	82
6.14	Kartezyen Çarpımın Genelleşmesi	83
6.15	ALİŞTIRMALAR	83

7 Denklemler 5

7.1	Doğru denklemleri	87
7.1.1	İki noktası bilinen doğru Denklemi:	87
7.1.2	Bir noktası ve eğimi bilinen doğru Denklemi:	88
7.2	Doğrunun Genel Denklemi	88
7.2.1	İkinci Dereceden Denklemler	88
7.2.2	$ax^2 = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	89
7.3	$ax^2 + bx = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	89
7.3.1	$ax^2 + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	89
7.3.2	$ax^2 + bx + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	90
7.4	Değişken değiştirme	92
7.5	Köklü denklemler	92
7.6	Mutlak Değer	93
7.7	Aliştirmalar	94
7.8	Köklerle Katsayılar Arasındaki Bağlılıklar	94
7.8.1	Köklerin Toplamı:	95
7.8.2	Köklerin Çarpımı:	95
7.8.3	Köklerin Farkının Mutlak Değeri:	95
7.9	Aliştirmalar	95
7.10	İkinci Dereceden Denklemlerin İncelenmesi	96
7.11	Denklemler Sistemleri	97
7.12	Eşitsizlikler	97
7.13	Eşitsizlik Sistemleri	100
7.14	Aliştirmalar	100
7.15	İkinci Dereceden Fonksiyonlar	101
7.16	Parabol Çizimi	103

7.17 Alıştırmalar	105
7.18 Eşitsizlik Sistemlerinin Grafikle Çözümü	105
7.19 Örnekler:	105
7.20 Doğrusal denklem sistemleri	107

8 Parametrik denklemler 6

8.1 Eğrinin yönü	109
8.2 kapalı Eğri	109
8.3 Çember'in Parametrik Denklemleri	109
8.4 Elips'in Parametrik Denklemleri	110
8.5 Cycloid	111

9 Matrisler 6

9.1 Matrisler	113
9.1.1 Satır ve Kolon	113
9.2 Matrisin Bileşenleri	114
9.3 Matris İşlemleri	114
9.3.1 Matrislerin Toplamı	114
9.3.2 Matrislerde Çıkarma	115
9.3.3 Matrisin Sayı ile Çarpımı	115
9.3.4 Matrislerin Çarpımı	116
9.3.5 Çarpımın Sırası Değişemez	117
9.3.6 İki den çok matrisin Çarpımı	117
9.3.7 Matrisin Devriğı (transpose)	117
9.4 Matrislerin Çarpımının Devriğı	118
9.4.1 Matrislerde Bölme	118
9.5 Matris Türleri	119
9.5.1 Kare Matris	119
9.5.2 Sıfır Matris	119
9.5.3 Kare Matrisin Köşegenleri	119
9.5.4 Kare Matrisin Kuvveti	119
9.5.5 Birim Matris	119
9.5.6 Simetrik Matris	120
9.5.7 Anti Simetrik Matris	120
9.5.8 Ters Matris	121
9.5.9 Üçgensel Matris	121
9.5.10 Matrisin İzi (trace)	121
9.6 Örnekler	122
9.7 Matrisin Uzunluğu (size)	122
9.8 Determinantlar	123
9.9 Determinant Nedir?	123
9.9.1 1×1 Matrislerin determinanı	123
9.9.2 2×2 Matrislerinin determinanı	123
9.9.3 3×3 Matrislerinin determinanı	124
9.9.4 Sarrus Yöntemi	124
9.10 Başka Yöntemler	125
9.10.1 Yüksek Boyutlu Matrislerin Determinantları	125
9.11 Laplace Yöntemi	125

9.11.1 Minör	125
9.12 Eşçarpan (cofactor)	126
9.13 Determinant için Laplace Açılımı	127
9.14 Determinantların Özellikleri	128
9.14.1 Sarrus Yöntemiyle Hesap:	130
9.14.2 Laplace Yöntemiyle Hesap:	130
9.14.3 Gauss Eleme Yöntemi	130
9.15 Ters Matris	131
9.16 Matrisler Üzerinde İlkel Satır İşlemleri	131
9.17 Gauss Eleme Yöntemi ile Ters Matrisi Bulma	132
9.18 Eklî Matris	133
9.19 Eşçarpan İle Matrisin tersini Bulma	134
9.20 Doğrual Denklem Sistemleri	137
9.21 Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu	138
9.22 Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü	140
9.23 Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü	141

10 Doğrual Denklem Sistemleri 7

10.0.1 Sonsuz Çözüm	144
10.0.2 Tek çözüm	144
10.0.3 Matrislerle Çözüm	145
10.1 Denk Sistemler	146
10.2 İndirgenmiş Satır Eşolon Biçimi	147
10.3 Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu	148
10.4 Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü	150
10.5 Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü	151
10.5.1 İki Bilinmeyen için Cramer Formülü	151
10.5.2 Üç Bilinmeyen için Cramer Formülü	153
10.6 Alıştırılmalar	154

11 Polinomlar 7

11.1 Bir Belirsizli Polinomlar	155
11.2 Çok Belirsizli Polinomlar	157
11.3 Terimleri Kuvvetlerine Göre Sıralama	158
11.4 İki Polinomun Eşitliği	158
11.5 Uygulamalar	159
11.6 Polinomlar Kümesi Üzerinde İşlemler	160
11.7 Toplama	160
11.8 Uygulamalar	162
11.9 Çıkarma	163
11.10 Uygulamalar	164
11.11 Çarpma	164
11.12 Sayıl (skalerle) Çarpma	167
11.13 Uygulamalar	168
11.14 Başlıca Özdeşlikler	168
11.14.1 İki Terim Toplamının Karesi	168
11.14.2 İki Terimin Farkının Karesi	169
11.14.3 İki Terimin Toplamı İle Farkının Çarpımı	169

11.14.4Üç Terim Toplamının Karesi	170
11.14.5İki Terim Toplamının Küpü	171
11.14.6İki Terim Farkının Küpü	172
11.14.7İki Küp Toplamı	172
11.15İki Teriminin Kuvvetleri	174
11.16Alıştırmalar	177
11.17Polinomlarda Bölme	178
11.18Uygulamalar	183
11.19Bölme Algoritması	184
11.20Çarpan Teoremi	185
11.21Uygulamalar	187
11.22Uygulamalar	188
11.23Horner Yöntemi ile Bölme	189
11.24Bir Polinomun $(x - a)(x - b)$ İle Bölünmesinden Elde Edilen Kalan	190
11.25Uygulamalar	193
11.26Alıştırmalar	195
11.27Polinomların Çarpanlara Ayrılması	197
11.28Karmaşıkları Basite İndirmek	197
11.29ebob, ekok	198
11.30Cebirsel İfadeleri Çarpanlara	200
11.30.1Ortak Çarpan Parantezine Alma	201
11.31Uygulamalar	201
11.32Uygulamalar	203
11.33Özdeşlikler	203
11.34Uygulamalar	204
11.35Uygulamalar	206
11.36Özdeşlikleri Kullanma	206
11.37Uygulamalar	207
11.38Uygulamalar	209
11.39Uygulamalar	211
11.40Alıştırmalar	214
11.41Başlıca Özdeşlikler	215

12 Fonksiyonlar 8

12.1 Foksiyonun Grafiği	218
12.2 Tek Değerli Fonksiyonlar	219
12.3 Alıştırmalar	219
12.4 Fonksiyon Türleri	221
12.4.1 Eşit Foksiyonalar	221
12.4.2 İçine Fonksiyon	221
12.4.3 Örtün Fonksiyon	221
12.4.4 Bire Bir Fonksiyon	222
12.4.5 Bire Bir İçine Fonksiyon	222
12.4.6 Bire Bir Örtün Fonksiyon	222
12.4.7 Sabit Fonksiyon	222
12.4.8 Sıfır Fonksiyon	222
12.4.9 Özdeşlik Fonksiyonu	222

12.5 Kapalı Fonksiyon	223
12.6 Örnekler	223
12.7 Alıştırmalar	224
12.8 Fonksiyonların Bileşkesi	225
12.9 Bileşke İşleminin Özellikleri	227
12.9.1 Yer Değişim Özeliği Yoktur	227
12.9.2 Birleşme Özeliği	228
12.10 Ters Fonksiyon	228
12.11 Ters Fonksiyonun Grafiği	229

13 Rasyonel İfadeler 9

13.1 Alıştırmalar	231
13.2 Rasyonel İfadelerin Toplamı	231
13.3 Rasyonel İfadelerin Çarpımı	232
13.4 Rasyonel İfadelerde Bölme	233
13.5 Polinom Denklemler	233
13.6 Birinci Dereceden Polinom Denklemlerin Çözümü	233

14 Kombinasyon Ve Permütasyon 9

14.0.1 Kombinasyon (Combination)	235
14.1 Permütasyon (permutation)	235
14.2 Combinatorics	236
14.2.1 Kombinatorik'in temel formülü	237
14.3 Sayma	237

15 Pascal Üçgeni 9

16 Ön Trigonometri 9

16.1 Yönlü Açılar	245
16.2 Yönlü yaylar	245
16.3 Birim Çember	246
16.4 Açı Ölçü Birimleri	246
16.4.1 Derece	246
16.4.2 Grad	247
16.4.3 Radyan	247
16.5 Trigonometrik Fonksiyonlar	247
16.5.1 Simetrik Açılar	250
16.5.2 Simetrikler	250
16.6 Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri	251
16.7 Özel Açılar	251
16.8 Trigonometrik Fonksiyonları Grafikleri	252
16.8.1 Cosinus Grafiği	252
16.8.2 Sinus grafiği	253
16.8.3 Tanjant Grafiği	254
16.9 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	255
16.9.1 Arcsinus Fonksiyonu	255
16.9.2 ArcCosinus Fonksiyonu	256

16.9.3 Arctanjant Fonksiyonu	256
16.9.4 Arccotanjant Fonksiyonu	257
16.10 Örnekler	257
16.11 Periyodik Fonksiyonlar	258
16.12 Alıştırmalar	259
16.13 Limit	260
16.14 Fonksiyonun Limiti	260
16.15 Soldan ve Sağdan Yaklaşım	260
16.15.1 Soldan Limit	260
16.15.2 Sağdan Limit	260
16.15.3 Limit	261
16.16 Uç Noktalarda Limit	261
16.17 Karl Weierstrass'ın Tanımı	262
16.18 Örnekler:	262
16.19 Limit Kuralları	263
16.20 Belirsiz Biçemler	265
16.20.1 Sonsuzdaki Limit	266
16.21 Çözömlü Örnekler	266
16.22 Rasyonel Fonksiyonlarda Limit	270
16.22.1 Sonsuzda Limitin Olmadığı Durum	271
16.22.2 Köklü İfadelerin Sonsuzdaki Limiti	271
16.23 Çözömlü Prolemler	274

26 *Integral Alma Yöntemleri* 10

27 *Belirsiz İntegral* 10

27.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri	305
27.1 Değişken Değiştirme	305
27.2 Trigonometrik İntegraller	307
27.3 Ters Trigonometrik Konumlar	309
27.4 Çözömlü Problemler	310
27.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	316
27.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	316
27.5.2 Basit Kesirlere ayırma	317
27.5.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa	320
27.6 Karma problemler	323
27.7 Alıştırmalar	331
27.8 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	332
27.9 Sürekli Fonksiyonların İntegrali	332
27.10 Değişken Değiştirme	333
27.11 $\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu	336
27.12 Kısmi İntegrasyon	339
27.13 Polinomların Çarpanlara Ayrılması	342
27.14 Basit Kesirlere Ayırma	345
27.15 Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi	345
27.16 Rasyonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması	349
27.17 Rasyonelleştirme	351
27.18 Köklü İfadelerin İntegrali	352

27.19	İndirgenme Yöntemleri	358
27.20	Bazı İndirgeme Formülleri	360
27.21	Bağlantılı Oranlar	361

28 Belirsiz İntegral 11

28.0.1	Belirsiz İntegral Formülleri	363
28.1	Değişken Değiştirme	363
28.2	Trigonometrik İntegraller	365
28.3	Ters Trigonometrik Konumlar	367
28.4	Çözümlü Problemler	368
28.5	Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	374
28.5.1	Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	374
28.5.2	Basit Kesirlere ayırma	375
28.5.3	Payda'da Gerçek Kökü Olmayan Çarpan Varsa	378
28.6	Belirli İntegral	387
28.7	Belirsiz İntegral Kuralları	388
28.8	Calculus'un Birinci Temel Teoremleri	388
28.8.1	Calculus'un 1.Teoremi	388
28.8.2	Calculus'un İkinci Temel Teoremi	388
28.9	Belirsiz İntegral	391
28.9.1	Belirsiz İntegral Formülleri	392

25 İntegral Alma Yöntemleri 11

25.1	Belirsiz İntegral	511
25.2	İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	511
25.3	Sürekli Fonksiyonların İntegrali	512
25.4	Değişken Değiştirme	513
25.5	$\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu	516
25.6	Kısmi İntegrasyon	519
25.7	Polinomların Çarpanlara Ayrılması	522
25.8	Basit Kesirlere Ayırma	525
25.9	Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi	525
25.10	Rasyonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması	529
25.11	Rasyonelleştirme	531
25.12	Köklü İfadelerin İntegrali	532
25.13	Alıştırmalar	538
25.14	İndirgenme Yöntemleri	538
25.15	Bazı İndirgeme Formülleri	540
25.16	Bağlantılı Oranlar	541

26 Kutupsal Koordinatlar 11

26.1	Kutupsal Koordinatlarda Grafik	545
26.2	Alıştırmalar	546
26.3	Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi Örnekleri	547
26.3.1	Merkeze Göre Simetri	547
26.3.2	Ox - Eksenine Göre Simetri	547
26.3.3	Oy - Eksenine Göre Simetri	547

26.4 Grafik Çiziminde İzlenecek Yol:	549
26.5 Alıştırmalar	550
26.6 Kutupsal Sistemde Teğetin Eğimi	550
26.7 Kutupsal Kordinatlarda Alan hesabı	551
26.8 İki kutupsal eğri arasında kalan alan	552
26.9 Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu	554
26.10 Kutupsal Koordinatlarda Dönel Yüzeyler	554
26.11 Alıştırmalar	555
26.12 Parametrik Fonksiyonların Türevi	556
26.13 İkinci Basamaktan Türev	557
26.14 Alıştırmalar	559
26.15 Sayısal İntegraller	561
26.15.1 Dikdörtgen Yöntemi	561
26.16 Yamuk Kuralı	562
26.17 Pappus teoremleri	563
26.18 Alıştırmalar	564
26.18.1 Dairesel Simit'in Yüzeyi	565
26.18.2 Dairesel Simit'in Hacmi	565
26.19 Simpson Yöntemi	565
26.20 Alıştırmalar	568
26.21 Alan Hesabı	569
26.22 İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı	569

27 Diziler 12

27.0.1 Örnekler	574
27.0.2 Yakınsak Dizi	574
27.1 Aritmetik Dizi	575
27.2 Geometrik Dizi	576
27.3 Monoton Dizi	576
27.4 Alt dizi	576
27.5 Sınırlı dizi	577
27.6 Dizilerde Limit Özellikleri	577
27.7 Alıştırmalar	582

28 Seriler 12

28.0.1 Kısmi Toplam	584
28.1 Yakınsak Seriler	584
28.2 Rasyonel Terimli Seriler	584
28.3 Özel Seriler	585
28.4 Aritmetik Seri	585
28.5 Geometrik Seri	586
28.6 Binom Serisi	587
28.7 Genelleşmiş Binom Teoremi	588
28.8 Serilerin Özellikleri	589
28.9 Alıştırmalar	592
28.10 Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	592
28.11 Yakınsaklık Aralığı	593
28.12 Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler	594

28.13	Toplama ve Çıkarma	594
28.14	Kuvvet Serilerin Çarpımı	595
28.15	Kuvvet Serilerinin Bölümü	595
28.15.1	Alterne Seriler	595
28.16	Alıştırmalar	598
28.17	Cauchy Dizi ve Serileri	599

29 Seriler İçin Yakınsaklık Testleri 13

29.1	p-serisi	606
29.2	Oran Testi	606
29.3	Kök Testi	609
29.4	İntegral Testi: p-serisi	609
29.5	p-serisi	611
29.6	Karşılaştırma Testleri	612
29.7	Limit Karşılaştırma Testi	614
29.8	Oran Testi	617
29.9	Newton Metodu	621

30 Değişken Terimli Seriler 13

30.1	Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	625
30.2	Yakınsaklık Aralığı	626
30.3	Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler	627
30.4	Toplama ve Çıkarma	627
30.5	Kuvvet Serilerin Çarpımı	627
30.6	Kuvvet Serilerinin Bölümü	628
30.7	Maclaurin Serisi Uygulamaları	628
30.8	Düzenli Yakınsama	631
30.8.1	Fonksiyon Dizileri	631
30.8.2	Fonksiyon Serileri	635
30.8.3	Fonksiyon Dizileri İçin Cauchy Kriteri	637
30.8.4	Fonksiyon Serileri İçin Cauchy Kriteri	638
30.9	Alıştırmalar	640
30.10	Fonksiyon Dizi ve Serilerinin İntegrali	640
30.11	Dirichlet ve Abel Testleri	644
30.12	Dirichlet Testi	645
30.13	Fonksiyon Dizi ve Serilerinin Türevlenmesi	647
30.14	Alıştırmalar	648
30.15	Kuvvet Serilerinin Türevlenmesi	650
30.16	Alıştırmalar	652
30.17	Kuvvet Serilerinin İntegrali	653
30.18	Çözümlü Kuvvet Serisi Problemleri	654
30.19	Alıştırmalar	657
30.20	Serilerin Yaklaşık Toplamı	658
30.21	Alıştırmalar	660

31 Vektörler 13

31.1	Vektör Uzayı	661
31.2	Simgeler	662

31.3 Denk Vektörler	662
31.4 Vektörlerin Gösterimi	662
31.5 Vektör Uzayında İşlemler	663
31.5.1 Sıfır Vektörü	663
31.6 Vektörlerin Toplamı	663
31.6.1 Toplamının Özellikleri	664
31.7 Vektörlerde Çıkarma İşlemi	664
31.8 Vektörün Sayı ile Çarpımı	664
31.9 Birim Vektör	665
31.10 Doğru Açılı	665
31.11 Analitik Geometriye Giriş	666
31.12 Alıştırmalar	667
31.13 Bileşenlerle İşlemler	668
31.14 Nokta Çarpım	669
31.15 İzdüşüm	670
31.15.1 İzdüşümün Genellenmesi	670
31.16 İki Vektör Arasındaki Açık	671
31.17 İki Vektör Arasındaki Açının Ölçümü	672
31.18 İki Vektörün Birbirine Dikliği	672
31.18.1 Üçgen Eşitsizliği	673
31.19 Uzayda Doğru ve Düzlem	674
31.20 İki noktası Verilen Doğru Denklemi	674
31.21 Noktanın Doğruya Uzaklığı	675
31.22 Düzlem Denklemi	676
31.23 Üç Noktadan geçen Düzlem Denklemi	676
31.24 Noktanın Düzleme Uzaklığı	677
31.25 Alıştırmalar	678
31.26 Vektörel Çarpım	679
31.27 Vektörel Çarpımın Özellikleri	680
31.28 Vektörel Çarpımı Geometrik Yorumları	680
31.28.1 Diklik	680
31.28.2 Alan	681
31.29 Üçlü Çarpım	681
31.30 Alıştırmalar	682
31.31 Uzayda Doğru ve Düzlem	682
31.32 İki noktası Verilen Doğru Denklemi	683
31.33 Noktanın Doğruya Uzaklığı	684
31.34 Düzlem Denklemi	684
31.35 Üç Noktadan Geçen Düzlem Denklemi	685
31.36 Noktanın Düzleme Uzaklığı	686
31.37 Alıştırmalar	687

32 Katlı İntegral 14

32.1 İki Katlı İntegralin Özellikleri	690
32.2 Ardışık İntegral	691
32.3 Katlı İntegral Uygulamaları	702
32.4 Alıştırmalar	707
32.5 Katlı integralde değişken değiştirme	707

32.6	Alıştırmalar	710
32.7	İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı	711
32.8	Alıştırmalar	713
32.9	İki Katlı İntegral İle Hacim hesapları	714
32.10	Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller	715
32.11	Alıştırmalar	718

33 Üç Katlı İntegraller 15

33.1	Hacim	723
33.2	Alıştırmalar	725
33.3	Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme	725
33.4	Alıştırmalar	726
33.5	Silindrisel Koordinatlar	726
33.5.1	Silindir Nedir?	726
33.6	Alıştırmalar	730
33.7	Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar	730
33.8	Alıştırmalar	734

34 Eğrisel İntegraller 15

34.1	Düzlemde Eğrisel İntegral	735
34.2	Uzayda Eğrisel İntegral	740
34.3	Alıştırmalar	742
34.4	Vektör Alanlarının Eğrisel İntegralleri	743
34.5	Divergence	744
34.6	Vector Alanını Eğrisel İntegrali	746
34.7	Eğrisel İntegrallerle İş	748
34.8	Alıştırmalar	749
34.9	İntegralin Yoldan Bağımsızlığı	750
34.10	Alıştırmalar	755
34.11	Üç Boyutlu Uzayda Korunumlu Vektör Alanı	755
34.12	Green Teoremi	756
34.13	Green teoremi İle Alan Hesabı	759
34.14	Alıştırmalar	760
34.15	Yüzey İntegralleri	760
34.16	Parametrik Yüzeyin Alanı	762
34.17	Yüzey İntegrali	765
34.18	Önlenendirilmiş Yüzey Üzerinde İntegral	767
34.19	Vektör Alanlarının İntegrali	768
34.20	Stokes Teoremi	769
34.21	Divergence Teoremi	773
34.21.1	Alıştırmalar	776

35 Vektör Değerli Fonksiyonlar 15

35.1	Vektör Değerli Fonksiyonlar ve Uzay Eğrileri	777
35.2	Vektör Değerli Fonksiyonların Limiti	778
35.2.1	Limit	778
35.3	Vektör değerli Fonksiyonların Sürekliliği	780

35.4 Süreklilik	780
35.5 Türev	780
35.6 Türev Kuralları	781
35.7 Vektör değerli Fonksiyonların Teğeti	782
35.8 Düzgün Eğri	782
35.8.1 Düzgün Eğriler	783
35.9 Vektör Değerli Fonksiyonların integrali	783
35.9.1 Belirsiz İntegral	783
35.9.2 Belirli İntegral	784
35.10Alıştırmalar	785
35.11Eğri Uzunluğu	786
35.12Eğrilik	787
35.13Eğrilik Çemberi	789
35.14Normal ve İkinci Normal Vektörler	790
35.15Alıştırmalar	791
35.16Uzayda Hareket	792
35.17Kepler Yasaları	794
35.18Alıştırmalar	794

36 Konikler 16

36.1 Koniklerin Adlandırılması	795
36.2 Koniklerin Kutupsal Sistemdeki Denklemleri	795
36.3 Koniklerin Kartezyen Denklemi	797
36.4 Alıştırmalar	799
36.5 İkinci Dereceden Yüzeyler	799
36.6 Elipsoid	801
36.7 Elipsoid	801
36.8 Hiperboloid	801
36.9 Eliptik Paraboloid	804
36.10Eliptik Koni	804
36.11Alıştırmalar	805

37 Fiziksel uygulamalar 16

37.1 Düzlemsel bölgelerin kütle merkezi	807
37.2 Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	807
37.3 Alıştırmalar	811
37.4 Yay'ın Kütle merkezi	811
37.5 Alıştırmalar	811
37.6 Yoğunluk	811
37.7 Moment	812
37.7.1 Noktaya Göre Moment	812
37.7.2 Doğru üzerinde Moment	812
37.8 Kütle Merkezi	813
37.9 Noktanın Eksene Göre Momenti	813
37.10Düzleme Göre Moment	814
37.11Bir Düzlem Parçasının Bir Eksene Göre Momenti	815
37.12Bir Yayın Momenti	815
37.13Uygulamalar	816

37.14	Üç Katlı İntegral İle Moment	817
37.15	Düzlemsel Bölgelerin Kütle Merkezi	818
37.16	Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	819
37.17	Alıştırmalar	822
37.18	Yay'ın Kütle merkezi	822
37.19	Alıştırmalar	823
37.20	Yoğunluk	823
37.21	Work (İş)	824

38 Diferensiyel denklemler 17

38.1	Birinci basamaktan birinci dereceden Diferensiyel denklemler	827
38.2	Özel ve Genel Çözüm	828
38.3	Tek Değişkenli Diferensiyel Denklemler	828
38.4	Denklemin Doğrusala Dönüşmesi	830

39 Diferensiyel Denklemler 17

39.1	Tek Değişkenli Diferensiyel Denklemler	831
39.2	Tam Diferensiyel	833
39.3	Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler	840
39.4	Alıştırmalar	843
39.5	İntegral Çarpanı	844
39.6	Alıştırmalar	852
39.7	Birinci Basamaktan Homojen denklemler	854
39.8	Alıştırmalar	862
39.9	Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklemler	864
39.10	Alıştırmalar	868
39.11	Tam Diferensiyel	869
39.12	Alıştırmalar	874
39.13	Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler	876
39.14	Alıştırmalar	879
39.15	İntegral Çarpanı	881
39.16	Alıştırmalar	888
39.17	Birinci Basamaktan Homojen denklemler	889
39.18	Alıştırmalar	894
39.19	Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklemler	895
39.20	Alıştırmalar	900
39.21	Bernoulli Diferensiyel Denklemi	901
39.22	Bernoulli Diferensiyel Denkleminin Çözümü	901
39.23	Çözümlü Örnekler	902
39.24	Alıştırmalar	905
39.25	Riccati Diferensiyel Denklemi	906
39.26	Clairaut Diferensiyel denklemleri	910
39.27	Lagrange Diferensiyel Denklemi	911
39.28	Alıştırmalar	913

40 Üç Katlı İntegraller 17

40.1	Hacim	917
------	-----------------	-----

40.2	Alıştırmalar	919
40.3	Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme	919
40.4	Alıştırmalar	920
40.5	Silindirsel Koordinatlar	921
40.6	Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar	923
40.7	Alıştırmalar	926
40.8	Düzensiz İntegraller	927
40.9	Aralığın Sonsuz Olması Durumu	927
40.9.1	$[a, \infty)$ aralığında integral	927
40.9.2	$(-\infty, a]$ aralığında integral	927
40.9.3	$(-\infty, \infty)$ aralığında integral	928
40.10	Aralığın uç noktalarında fonksiyonun sınırsız olması durumu:	928
40.10.1	Sol Uç	928
40.10.2	Sağ Uç	928
40.11	Aralığın içinde fonksiyonun sınırsız olması durumu:	928
40.12	Düzensiz intgralleri karşılaştırma:	929
40.12.1	Alıştırmalar	937
40.13	Düzlemsel bölgelerin kütle merkezi	937
40.14	Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	938
40.15	Alıştırmalar	941
40.16	Yay'ın Kütle merkezi	941
40.17	Alıştırmalar	942
40.18	Yoğunluk	942
40.19	Sıvı Basıncı	942
40.20	Work (İş)	944
40.21	Pappus teoremleri	945
40.22	Alıştırmalar	946
40.23	Simpson Yöntemi	947
40.24	Yamuk Kuralı	949
40.25	Moment	951
40.26	Noktaya Göre Moment	951
40.27	Doğru üzerinde Moment	951
40.27.1	Kütle Merkezi	952
40.28	Noktanın Eksene Göre Momenti	952
40.29	Düzleme Göre Moment	952
40.30	Bir Düzlem Parçasının Bir Eksene Göre Momenti	953
40.31	Bir Yayın Momenti	954
40.32	Uygulamalar	955

41 Belirli İntegral Uygulamaları 18

41.1	Düzlemsel Eğrilerin Uzunluğu	957
41.2	Alan hesapları	960
41.3	Foksiyonun Orta Değeri	961

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,
ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

26 İntegral Alma Yöntemeleri

$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali türevleri $f(x)$ olan bütün fonksiyonlardır. Belirsiz integral

$$F(x) = \int f(x) dx + C \quad (Csabit) \quad (26.1)$$

simgesiyle gösterilir. Belirsiz denmesinin nedeni, $F(x)$ fonksiyonu türev kabul eden fonksiyonların sonsuz çoklukta oluşu ve hangisinden söz edildiğinin belli olmayışdır. Sonsuz çoklukta olan belirsiz integraller birer sabit farkıyla birbirlerine eşittirler. Bu demektir ki, $F(x)$ ile $G(x)$ fonksiyonları $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali iseler

$$f(x) - G(x) = K \quad (Ksabit) \quad (26.2)$$

olur.

$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integraline *ilkel* (primitive), *ters türev* gibi adlar da verilir. Yalınlığı nedeniyle *ilkel* terimini tercih ediyouz. Ama öteki terimleri de, konuya açıklık getirmek gerektiğinde, eş anlamlı olarak kullanacağız.

(25.1) ifadesinde C sabiti sayısal her değeri alabilir. Dolayısıyla $F(x)$ fonksiyonunun sonsuzçoklukta belirsiz integrali vardır. Gerçel fonksiyonlarda çalışıyorsak, (25.1) belirsiz integralleri bütün düzlemi doldurur. Yani düzlemin her noktasından geçen bir ve yalnızca bir tane belirsiz integral vardır. Aynı fonksiyonun belirsiz integralleri kesişmezler.

27 Belirsiz İntegral

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihsiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

27.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri

Temel Formüller: Aşağıdaki formüllerde $u = u(x)$ fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin dıve sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

- $\int u^n du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C,$
- $\int u dv = uv - \int v du$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
- $\int \frac{1}{au+b} du = \frac{1}{a} \ln|au+b| + C$

27.1 Değişken Değişirme

Belirsiz integral verildiği biçimde bilinen integral formüllerinden hiç birisine benzemiyorsa, bazen uygun bir değişken değişimi ile bilinen formüllerden birisine dönüştürülebilir. Bu eylemin genel yöntemi şöyledir: $x = g(t)$ konumu yapılırsa, $dx = g'(t)dt$ olacağı düşünülürse,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad (27.1)$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı bilinen integral formüllerinden birisine benziyorsa, eşitliğin sağ yanı hesaplanabilir. Sonra asıl x değişkenine dönmek için $t = g^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu kullanmak gerekir. Dikkat edilirse, bu sonuç zincir theoremına benziyor.

(28.1) formülü ile belirli integral değerleri de bulunabilir:

Teorem 27.1. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, $g(t)$ fonksiyonu $\alpha \leq g(t) \leq \beta$ için sürekli ve $g'(t)$ türevi de sürekli ise $a = g(\alpha)$ ve $b = g(\beta)$ ise ya da buna denk olarak $\alpha = g^{-1}(a)$ ve $\beta = g^{-1}(b)$ ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(g(t))g'(t)dt \quad (27.2)$$

olur.

Belirli integral için var olan theoremlar, Teorem ?? ve Teorem ?? yardımıyla belirsiz integrallere kolayca uygulanabilir.

Aşağıdakiler değişken değişimini gösteren örneklerdir.

Örnek 27.2.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}, \quad (t = x^2 + 1, \quad du = 2x dx) \\ &= \frac{1}{2} \ln|u| + C \\ &= \ln \sqrt{x^2 + 1} + C \end{aligned}$$

Örnek 27.3.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(2\ln x)}{x} dx &= \frac{1}{2} \int \sin t dt, \quad (t = 2\ln x, \quad dt = \frac{2}{x} dx, \quad dx = \frac{x}{2} dt) \\ &= -\frac{1}{2} \cos t + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2\ln x) + C \end{aligned}$$

Örnek 27.4.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x + 1} e^x dx &= \int t^{1/2} dt, \quad (t = e^x + 1, \quad dt = e^x dx, \quad dx = e^{-x} dt) \\ &= \frac{2}{3} t^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (e^x + 1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Örnek 27.5.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx &= \int \frac{dx}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}} dx \\ &= \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}} dx \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad [t = e^{-x}, \quad dt = -e^{-x} dx] \\ &= -\sin^{-1} t + C \\ &= -\sin^{-1}(e^{-x}) + C \end{aligned}$$

Örnek 27.6.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{5+4x+x^2} dx &= \int \frac{dx}{1+(x+2)^2} dx \\
 &= \int \frac{du}{1+u^2} du, \quad [u = (x+2), \quad du = dx] \\
 &= \tan^{-1} u + C \\
 &= \tan^{-1}(x+2) + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.7.

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_1^2 \sin t dt, \quad \left[t = \sqrt{x+1}, \quad dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \right] \\
 &= 2 \int_1^2 \sin t dt, \quad [x=0 \Rightarrow t=1, \quad x=3 \Rightarrow t=2] \\
 &= -2 \cos u \Big|_1^2 \\
 &= 2(\cos 1 - \cos 2)
 \end{aligned}$$

27.2 Trigonometrik İntegraller

Örnek 27.8.

$$\begin{aligned}
 \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx, \quad (t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx) \\
 &= - \int \frac{dt}{t} + C \\
 &= -\ln|t| + C \\
 &= -\ln|\cos x| + C \\
 &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + C \\
 &= \ln|\sec x| + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.9.

$$\begin{aligned}
 \int \cot x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad (t = \sin x, \quad dt = \cos x dx) \\
 &= \int \frac{dt}{t} + C \\
 &= \ln|t| + C \\
 &= \ln|\sin x| + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.10.

$t = (\sec x + \tan x)$, $dt = \sec x \tan x + \sec^2 x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx, \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx + C \\ &= \int \frac{dt}{t} &= \ln |t| + C \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.11.

$t = (\csc x + \cot x)$, $dt = -(\csc x \cot x + \csc^2 x) dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx \\ &= \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} + C \\ &= \int -\frac{dt}{t} \\ &= -\ln |t| + C \\ &= -\ln |\csc x + \cot x| + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.12.

n tek ise $n = 2k + 1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int (t^n (1 - t^2)^k) dt + C\end{aligned}$$

çıkar. $(1 - t^2)^k$ binoma göre açılabilir ve sonuç t ye göre bir polinom olur. Polinom terim terime integrallenebilir. Sonra istenirse $\sin x$ 'e dönüşüm yapılabilir. Bunu bir örnekle açıklamak daha kolay olacaktır.

Örnek 27.13.

n tek ise $n = 2k + 1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x (\cos^2 x) \cos x dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx, \quad (t = \sin x, dt = \cos x dx) \\ &= \int (t^2 - t^4) dt + C \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C\end{aligned}$$

Örnek 27.14.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x dx &= \int \sin^2 x (\cos^8 x) \sin x dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^8 x \sin x dx, \quad (t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx) \\
&= \int (1 - t^2) t^8 dt + C \\
&= \int (t^8 - t^{10}) dt \\
&= \frac{1}{9} t^9 - \frac{1}{11} t^{11} + C \\
&= \frac{1}{9} \cos^9 x - \frac{1}{11} \cos^{11} x + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.15.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx, \quad [\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C \\
&= \frac{1}{2} (x - \sin x \cdot \cos x) + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.16.

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx, \\
&= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx, \quad [\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)] \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sin 4x + C \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C
\end{aligned}$$

27.3 Ters Trigonometrik Konumlar

Çok kullanılan bazı ters trigonometrik konumlar (değişken değiştirimi),

$$x = a \sin \theta, \quad x = a \tan \theta, \quad x = a \sec \theta$$

fonksiyonları ile yapılır. Bunların karşıt fonksiyonları

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right), \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right), \quad \theta = \sec^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

dır.

Teorem 27.17.

İntegrali alınacak ifade $\sqrt{a^2 - x^2}$, ($a > 0$) terimi içeriyorsa, $x = a \sin \theta$ ya da ona denk olarak $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$ konumu yapılır.

Örnek 27.18.

a yarıçaplı bir disk içinde $b < a$ olmak üzere $[b, a]$ aralığına düşen daire kesmesinin A alanını bulunuz.

Çözüm: dairede simetriyi kullanırsak, söz konusu alan I.bölgedeki alanın iki katı olacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A &= \int_b^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_b^a (a^2 \cos \theta) d\theta, \quad [x = a \sin \theta, \quad dx = a \cos \theta d\theta] \\ &= a^2 (\theta + \sin \theta \cdot \cos \theta) \Big|_{x=b}^{x=a} \\ &= a^2 \left(\sin^{-1} \left(\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \right) \right) \Big|_{x=b}^{x=a} \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 - a^2 \sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) - b\sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.19.

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{3 \sec \theta} d\theta, \quad [x = 3 \tan \theta, \quad dx = 3 \sec^2 \theta d\theta] \\ &= \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C \\ &= \ln (\sqrt{9+x^2} + x) + C_1, \quad [C_1 = C - \ln 2] \end{aligned}$$

çıkar.

27.4 Çözümlü Problemler

1.

$$\int dx = x + C$$

2.

$$\int k dx = kx + C$$

3.

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

4.

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

5.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

6.

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

7.

$$\int x^2(1-x^3)^5 dx = -\frac{1}{18}x^3(x^3-2)(x^6-3x^3+3)(x^6-x^3+1) + C$$

8.

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \sinh^{-1}(x) - \sqrt{x^2+1} + C$$

9.

$$\int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}(x^2 - \ln(x^2+1)) + C$$

10.

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e^x}{x+1} + C$$

11.

$$\int xe^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C$$

12.

$$\int x(x-1)^6 dx = \frac{1}{8}x^8 - \frac{6}{7}x^7 + \frac{5}{2}x^6 - 4x^5 + \frac{15}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

13.

$$\int \frac{1}{5x+3} dx = \frac{1}{5} \ln(5x+3) + C$$

14.

$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3} dx$$

integralini bulunuz.

Çözüm: $t = \sqrt{x}$ değişken değiştirimi yapılırsa

$$\begin{aligned} t = \sqrt{x} &= \\ dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt = 2t dt \\ x &= t^2 \Rightarrow x+1 = t^2+1 \\ x &= 4 \mapsto t=2 \\ x &= 9 \mapsto t=3 \end{aligned}$$

(27.3)

değişken değiştirimi yapılınc,

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3} dx &= \int_2^3 \frac{t^2+1}{t^2+2t-3} \\ &= \int_2^3 \frac{2t^3+2t}{t^2+2t-3} dt \\ &= \int_2^3 \left(2t-4 + \frac{16t-12}{(t-1)(t+3)} \right) dt \\ &= \int_2^3 \left(2t-4 + \frac{1}{t-1} + \frac{15}{t+3} \right) dt \\ &= t^2 - 4t + \ln|t-1| + 15 \ln|t+3| \Big|_2^3 \\ &= [9 - 12 + \ln 2 + 15 \ln 6] - [4 - 8 + 0 + 15 \ln 5] \\ &= \ln 2 + 15 \ln 6 + 15 \ln 3 - 15 \ln 5 + 1 \\ &= \ln 2 + 15 \ln 6 - 15 \ln 5 + 1 \end{aligned}$$

İstenirse, 5. eşitlikten sonra t değişkeninden tekrar x değişkenine dönüşüm yapılabilir

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3} dx &= x - 4\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}+3| \Big|_4^9 \\ &= \ln 2 + 15\ln 6 - 15\ln 5 + 1 \end{aligned}$$

bulunur.

15.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu problemi çözmek için önce (28.4) eşitsizliğinin varlığını göreceğiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim \int_0^{2\pi} \frac{1}{x^2 + n^2} = 0 \quad (27.4)$$

Sonra Teorem ??-10.'yu kullanacağız:

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| dx \quad (27.5)$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2} dx \quad (27.6)$$

$$= \frac{2\pi}{n^2} \quad (27.7)$$

Bu eşitsizliklerden limite geçerse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n^2} = 0$$

çıkar.

16.

$$\int (x+3) \sin(x^2 + 3x - 5) dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \int (x+3) \sin(x^2 + 3x - 5) dx &= \frac{1}{2} \int \sin(x^2 + 3x - 5) d(x^2 + 3x - 5) \\ &= -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 3x - 5) + C \end{aligned}$$

17.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x^2-x)}} dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} dx, \quad t = (x-\frac{1}{2}) \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-t^2}} dt \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{t}{5/2}\right) + e \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right) + e
\end{aligned}$$

18.

$$\int_0^1 x \ln(x+3) dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$t = \ln(x+3)$ konumu yapılırsa $dv = x dx$, $dt = \frac{dx}{x+3}$, $v = \frac{x^2}{2}$ olur. Bunlar kısmi integral formülünde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int x \ln(x+3) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(x+3) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+3} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln(x+3) - \frac{1}{2} \int \left(x-3 + \frac{9}{x+3}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln(x+3) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 9 \ln(x+3)\right) + C
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 x \ln(x+3) dx = \frac{5}{4} - \ln 4 + \frac{9}{2} \ln 3$$

bulunur.

19.

$$\int e^{x/2} \sin(ax) dx = \frac{1}{(a^2 + \frac{1}{4})} e^{x/2} \left(\frac{\sin(ax)}{2} - a \cos(ax)\right) + C$$

olduğunu sağlayınız.

20.

$$\int \frac{1}{(3 \cos x + 5)} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{2}\right) + C$$

olduğunu sağlayınız.

21.

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

22.

$$\int x \sin x \, dx = \sin x x \cos x + C$$

23.

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x} + C$$

24.

$$\int \csc(3x) \sec(3x) \, dx = \frac{1}{3} (\ln(\sin(3x)) - \ln(\cos(3x))) + C$$

25.

$$\int \frac{1}{1+x^3} \, dx = \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

26.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} \, dx = -2\sqrt{4-x} + C$$

27.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} \, dx = -\frac{2x}{\sqrt{x^3}} + C$$

28.

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C$$

29.

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx = \tan^{-1}(e^x) + C$$

Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \frac{1}{(au+b)^2} \, du = -\frac{1}{u+a} + C, \quad (au+b \neq 0)$
2. $\int (u+b)^n \, du = \frac{1}{n+1} (u+a)^{n+1} + C,$
3. $\int u(u+a)^n \, du = \frac{1}{(n+1)(n+2)} (u+a)^{n+1} ((n+1)u-a) + C,$
4. $\int \frac{1}{1+u^2} \, du = \tan^{-1} u + C$
5. $\int \frac{1}{a^2+u^2} \, du = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C = -\frac{1}{a} \cot^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
6. $\int \frac{1}{u^2-a^2} \, du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$
7. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C$
8. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

Köklü İfadelerin İntegralleri:

1. $\int \sqrt{x-a} \, dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} + C$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} \, dx = 2\sqrt{x \pm a} + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} \, dx = -2\sqrt{a-x} + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \, du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C = -\cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}} \, du = \ln \left| u + \sqrt{u^2-a^2} \right| + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \, du = \ln \left| u + \sqrt{u^2+a^2} \right| + C$

$$7. \int \frac{1}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} du = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}} \right| + C$$

$$8. \int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$9. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$10. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri:

$$1. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$2. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$3. \int \tan u du = \ln |\sec u| + C = \ln |\cos u| + C$$

$$4. \int \cot u du = \ln |\sin u| + C$$

$$5. \int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C = \ln \left| \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$$

$$6. \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$7. \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$8. \int \csc u \tan u du = \sec u + C$$

$$9. \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

Hiperbolik Fonksiyonların İntegralleri:

$$1. \int \sinh u du = \cosh u + C$$

$$2. \int \cosh u du = \sinh u + C$$

$$3. \int \tanh u du = \ln |\cosh u| + C$$

$$4. \int \coth u du = \ln |\sinh u| + C$$

$$5. \int \operatorname{sech}(u) du = \tanh^{-1}(\sinh u) + C$$

$$6. \int \operatorname{csch}(u) du = -\operatorname{coth}^{-1}(\cosh u) + C$$

$$7. \int \operatorname{sech}^2(u) du = \tanh u + C$$

$$8. \int \operatorname{csch}^2(u) du = -\operatorname{coth} u + C$$

$$9. \int \operatorname{sech}(u) \tanh u du = -\operatorname{sech}(u) + C$$

$$10. \int \operatorname{csch}(u) \coth u du = -\operatorname{csch}(u) + C$$

Üstel Fonksiyonların İntegralleri:

$$1. \int e^{ku} du = \frac{1}{k} e^{ku} + C$$

$$2. \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$3. \int u a^{ku} du = \frac{1}{k \ln a} a^{ku} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$4. \int u^2 a^{ku} du = a^{ku} \left(\frac{u^2}{k} - \frac{2u}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right) + C$$

$$5. \int \frac{e^{kx}}{x} dx = \ln u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n \cdot n!}$$

$$6. \int e^{au} \sin bu \, du = \frac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2} a^2 + b^2 + C$$

$$7. \int e^{au} \cos bu \, du = \frac{e^{au}(a \cos bu + b \sin bu)}{a^2 + b^2} + C$$

Logaritmik Fonksiyonların İntegralleri:

$$1. \int \ln(kx) \, dx = x \ln(kx) - x + C$$

$$2. \int \ln(ax + b) \, dx = x \ln(ax + b) - x + \frac{b}{a} \ln(ax + b) + C$$

$$3. \int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

$$4. \int (\ln(kx))^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln(kx))^{n-1} \, dx + C$$

$$5. \int \frac{1}{\ln x} \, dx = \ln |\ln x| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n \cdot n!} + C$$

$$6. \int x^m \cdot \ln x \, dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \quad (m \neq -1)$$

$$7. \int \frac{1}{x(\ln x)^n} \, dx = \frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

$$8. \int \ln(x^2 + a^2) \, dx = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$9. \int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

$$10. \int \cos(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$$

27.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri

27.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse

$y = \ln u \implies y' = \frac{u'}{u}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{u'(x) dx}{u(x)} = \ln |u(x)| + C$$

yazabiliriz. Bazen uygun değişken değiştirimi ile integrali alınacak fonksiyon bu biçime sokulabilir.

Örnekler:

1. $y = \ln x \implies y' = \frac{1}{x}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

yazabiliriz.

2. İntegrali alınacak fonksiyon $\frac{1}{x-a}$ biçiminde ise, onun $\ln |x - a| + C$ fonksiyonunun türevi olduğunu biliyoruz.

$$\int \frac{1}{x-2} dx \tag{27.8}$$

integralini hesaplamak için $w = x - 2$, $dw = dx$ konumu yapılsa,

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{1}{w} dw = \ln |w| + C = \ln |x - 2| + C$$

bulunur.

3. Paydanın türevi paya eşitse, bir değişken değişimini ifadeyi $\frac{dw}{u}$ biçimine dönüştürür.

$$\int \frac{r^2 - 2r}{r^3 - 3r^2 + 1} dr$$

integralini hesaplamak için

$$w = r^3 - 3r^2 + 1, \quad dw = (3r^2 - 6r)dr = 3(r^2 - 2r)dr$$

konumu yapılsa,

$$\begin{aligned} \int \frac{r^2 - 2r}{r^3 - 3r^2 + 1} dr &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{w} dw \\ &= \frac{1}{3} \ln|w| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|r^3 - 3r^2 + 1| + C \end{aligned}$$

bulunur.

4. Çoğunlukla payda'nın türevi paya eşit olmaz. Bu durumlarda da değişken değişimini bazen işe yarayabilir.

$$\int \frac{s+2}{s+3} ds$$

integralini hesaplamak için $w = s - 3$, $dw = ds$ konumu yapılsa,

$$\begin{aligned} \int \frac{s+2}{s+3} ds &= \int \frac{w+5}{w} dw = \int \left(1 + \frac{5}{w}\right) dw \\ &= w + 5 \ln|w| + C \\ &= s - 3 + 5 \ln|s - 3| + C \end{aligned}$$

bulunur.

27.5.2 Basit Kesirlere ayırma

Teorem 27.20. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu için, payın derecesi paydadunkinden küçük ve paydanın baş katsayısı 1 olsun. Payda

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

gibi doğrusal çarpanlarına ayrılabilirse,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} \quad (27.9)$$

biçiminde yazılabilir.

Bu teoremin formal ispatını vermeye gerek kalmadan, integral hesabında gerekli olacağı için A_1, A_2, \dots, A_n katsayılarının hesaplanışını göstereceğiz. O eylem ispat yerine geçecektir. Bunun için yapılacak iş basittir. (28.9) ifadesinin sağ yanındaki terimlerin paydalarını eşitleyip ortak payda altında toplarız. Sağ tarafın payına

gelecek olan polinoma $S(x)$ dersek, (28.9) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} \quad (27.10)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan $P(x) \equiv S(x)$ olması gerektiği çıkar. Bu özdeşlikte eşit dereceli terimlerin katsayılarını eşitleyerek istenen A_1, A_2, \dots, A_n katsayıları hesaplanabilir.

Katsayıları kolay hesaplamaya yarayan başka pratik bir yöntem de şöyledir: (28.9) eşitliğinin iki yanını herhangi bir $(x - a_j)$ ile çarpıp $x \rightarrow a_j$ iken limiti hesaplayalım: Her $(1 \leq j \leq n)$ için,

$$A_j = \lim_{x \rightarrow a_j} (x - a_j) \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a_j)}{(a_j - a_1)(a_j - a_2) \dots (a_j - a_n)} \quad (27.11)$$

yazılabilir. Bu eşitlikte paydası $(x - a_j)$ olan terime karşılık gelen A_j katsayısı bulunmuş olur. Her $(1 \leq j \leq n)$ için bu işlem yapılırsa, A_1, A_2, \dots, A_n katsayıları hesaplanmış olur. Bu işleme dikkat edersek, yapılan iş,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} \quad (27.12)$$

eşitliğinin sağ yanında paydadaki $(x - a_j)$ çarpanını yok sayıp geride kalan ifadede x yerine a_j koymaktan ibarettir. Katsayıların hesaplanmasında bu oldukça kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

Örnekler: Bazen paydayı çarpanlarına ayırmak integral işlemini basitleştirir.

5.

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6} dx \quad (27.13)$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi basit kesirlerine ayıracağız.

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} = \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} \quad (27.14)$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad (27.15)$$

$$= \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} \quad (27.16)$$

$$\implies (A+B) = 1, \quad -3A-2B = 4 \quad (27.17)$$

$$\implies a = -6, \quad B = 7 \quad (27.18)$$

olur. Buradan,

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6} dx = -6 \int \frac{1}{x-2} dx + 7 \int \frac{1}{x-3} dx \quad (27.19)$$

$$= -6 \ln|x-2| + 7 \ln|x-3| + C \quad (27.20)$$

çıkar.

6.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)} dx &= \frac{A}{x-2} + \frac{A}{x+2} + \frac{A}{x-5} \\ &= \frac{104}{84(x-5)} + \frac{35}{x-2} + \frac{15}{x+2} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)} dx &= \int \frac{104}{84(x-5)} + \int \frac{35}{x-2} + \int \frac{15}{x+2} \\ &= \frac{1}{84}(104 \ln|x-5| - 35 \ln|x-2| + 15 \ln|x+2|) + C\end{aligned}$$

bulunur.

7. Payın derecesi paydaninkinden büyükse, önce bölme işlemi yapılır, sonra yukarıdaki yöntemle başvurulur:

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2} dx$$

integralini hesaplamak için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^3-4}{x^2-x-2} = (x+2) + \frac{9x+2}{x^2-x-2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2} dx &= \int (x+2) dx + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2} dx\end{aligned}$$

yazılabilir. Sağdaki integrali hesaplamak için,

$$\begin{aligned}\frac{9x+2}{x^2-x-2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \\ \Rightarrow A &= \frac{7}{3}, B = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2} dx &= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \frac{7}{3} \ln|x+1| + \frac{20}{3} \ln|x-2| + C_2 \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{7}{3} \ln|x+1| + \frac{20}{3} \ln|x-2| + C, \quad (C = C_1 + C_2)\end{aligned}$$

bulunur.

- 8.

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x} dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x} dx = \int \left(1 + \frac{x+2}{x^3-x}\right) dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x} dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yandaki integral içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^3-x} &= \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)} \\ \Rightarrow &\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ -A=2 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözümlerse $A = -2$, $B = 3/2$, $C = 1/2$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^3-x} dx &= x - 2 \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= x - 2 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

çıkar.

9. Paydanın bir yada iki dereceli bir çarpanı m kez tekrar ediyorsa, onu kesirlerine ayırırken söz konusu çarpan için, dereceleri 1 den m ye kadar değişen terimler eklenir.

Örnek 27.21.

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2}$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2} \\ \Rightarrow &\begin{cases} A+B+C &= 0 \\ -2A-B+C &= 0 \\ A &= 1 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözümlerse $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2} &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

çıkar.

27.5.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa

Payda'da $ax^2 + bx + c$ gibi ikinci dereceden bir çarpan var ve $b^2 - 4ac < 0$ ise o çarpana ait gerçel kök yoktur. Basit kesirlere ayırırken ona ait terimi $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ biçiminde yazarız. Tabii, aynı düşüncemiz

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx, \int \frac{x}{x^2+a^2} dx, \int \frac{1}{x^2-a^2} dx, \int \frac{x}{x^2-a^2} dx$$

tipi integrallerin hepsine uygulayabiliriz. Sonuçlar daima,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (27.21)$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C \quad (27.22)$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{|x-a|}{|x+a|} + C \quad (27.23)$$

$$\int \frac{x}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-a^2| + C \quad (27.24)$$

formüllerine indirgenebilir.

Örnekler

1.

$$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x} dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^3 + x} dx = \int \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} &= \frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \\ &= \frac{A(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx}{x(x-1)(x+1)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} A + B &= 1 \\ C &= 3 \\ A &= 2 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözüldürse $A = 2$, $B = -1$, $C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2}{x^3 + x} dx &= 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} + 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= 2 \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 3 \tan^{-1} x + C \end{aligned}$$

çıkar.

2.

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \left(\frac{1}{(x-a)(x+a)} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \\ &= \frac{Ax + Aa + Bx - Ba}{(x^2 - a^2)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} A + B &= 0 \\ Aa - Ba &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözüldürse $A = 1/(2a)$, $B = -1/(2a)$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x-a} dx - \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x+a} dx \\ &= \frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \frac{|x-a|}{|x+a|} + C \end{aligned}$$

çıkar.

3. Bazen uygun bir değişken değiştirimi ile payda'nın türevi paya eşitlenebilir.

$$\int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} dx = \int \left(\frac{x^2 + 2}{x((2x^2 + 1)(2x^2 + 1)^2)} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2}{(x - a)(x + a)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{2x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(2x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{A(4x^2 + 4x + 1) + B(2x^4 + x^2) + C(2x^3 + x) + Dx^2 + Ex}{4x^5 + 4x^3 + x} \\ \Rightarrow &\begin{cases} 4A + 2B &= 0 \\ 2C &= 0 \\ 4A + B + D &= 1 \\ A &= 2 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözüldürse $A = 2$, $B = -4$, $C = 0$ $D = -3$, $E = 0$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} dx &= 2 \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{xdx}{2x^2 + 1} - 3 \int \frac{xdx}{(2x^2 + 1)^2} \\ &= 2 \ln|x| - \int \frac{du}{u} - \frac{3}{4} \int \frac{du}{u^2}, \quad (u = 2x^2 + 1) \\ &= 2 \ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C \\ &= 2 \ln\left(\frac{x^2}{2x^2 + 1}\right) + \frac{3}{4} \frac{1}{2x^2 + 1} + C \end{aligned}$$

çıkar.

- 4.

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx = \int \left(\frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{A(x^2 - x + 1) + B(x^2 + x) + C(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \\ \Rightarrow &\begin{cases} A + B &= 0 \\ -A + B + C &= 0 \\ A + C &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözümlerse $A = 1/3$, $B = -1/3$, $C = 2/3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} du + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

çıkar.

27.6 Karma problemler

1. Aşağıdaki integral formüllerini doğruluğunu sağlayınız.

Örnek 27.22.

$$\int \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Örnek 27.23.

$$\int \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} C$$

Örnek 27.24.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Örnek 27.25.

$$\int \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2 \tan x \sec^2 x + C$$

Örnek 27.26.

$$\int x(a^x) dx = \frac{a^x(\ln a - 1)}{\ln^2 a} + C$$

Örnek 27.27.

$$\int x(\sinh x) dx = x(\cosh x) + \sinh x + C$$

Örnek 27.28.

$$\int \sin \sqrt{x} dx = 2(\sin \sqrt{x} - 2 \cos \sqrt{x} + C$$

Örnek 27.29.

$$\int \sin^{-1}(\sqrt{x}) dx = \frac{1}{2}(\sqrt{-(x-1)x} + \sin^{-1}(\sqrt{x}) + C$$

Örnek 27.30.

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x}) dx = (x+1) \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$$

Örnek 27.31.

$$\int x \ln x = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) + C$$

2. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

Örnek 27.32.

$$\int \frac{x^2 - 5x - 9}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \left\{ \frac{1}{6} (-13 \ln(x-1) + 9 \ln(x+1) + 10 \ln(x+2)) \right\} + C$$

Örnek 27.33.

$$\int \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A &= 4 \\ A+B &= 3 \\ B &= 3 - A = 3 - 4 = -1 \\ C &= 3 \end{cases}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözüldürse $A = 4$, $B = -1$, $C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3 \int (x+2)^{-2} dx + C \\
&= \ln \frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\
&= \ln \frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.34.

$$\int \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\
&= \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\
\Rightarrow &\begin{cases} A &= 4 \\ A+B &= 3 \\ B &= 3 - A = 3 - 4 = -1 \\ C &= 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözümlerse $A = 4$, $B = -1$, $C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3 \int (x+2)^{-2} dx + C \\
&= \ln \frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\
&= \ln \frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.35.

$$\begin{aligned}
\int (1-3x)^5 dx &\Rightarrow t = 1-3x, dt = 3dx \\
&= \int t^5 \left(\frac{-1}{3} dt\right) \\
&= \frac{-1}{3} \frac{1}{6} t^6 \\
&= \frac{-1}{18} (1-3x)^6 + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.36.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{(\ln x + 4)^3}{x} dx &\Rightarrow t = \ln x + 4, dt = \frac{1}{x} dx \\
 &= \int t^3 dt \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \\
 &= \frac{1}{4} (\ln x + 4)^4 + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.37.

$$\begin{aligned}
 \int a^x dx &\Rightarrow t = a^x \Rightarrow t = e^{x \ln a}, \\
 &= \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} + C \\
 &= \frac{1}{\ln a} a^x + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.38.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &\Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt, \\
 &= 2 \int a^t dt \\
 &= \frac{2}{\ln a} a^t + C \\
 &= \frac{2}{\ln a} a^{\sqrt{x}} + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.39.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{1+x^8} dx &\Rightarrow t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3 dx, \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \frac{1}{4} \tan^{-1}(x^4) + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.40.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx &\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \\
 &= \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \ln |\sin x + \cos x| + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.41.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\cos^5 x} \sin x dx &\Rightarrow t = \cos x, dt = -\sin x dx \\
&= -\int \sqrt{t^5} dt \\
&= -\int t^{5/2} dt \\
&= -\frac{2}{7} t^{7/2} + C \\
&= -\frac{2}{7} (\cos^{7/2} x) + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.42.

$$\begin{aligned}
\int x^3 \sqrt{x-3} dx &\Rightarrow t^2 = x-3, 2t dt = dx, x = t^2 + 3 \\
&= \int (t^2 + 3)^3 \cdot t \cdot (2t dt), \quad [(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3] \\
&= 2 \int (t^8 + 9t^6 + 27t^4 + 27t^2) dt \\
&= \frac{2}{9} t^9 + \frac{18}{7} t^7 + \frac{54}{5} t^5 + \frac{54}{3} t^3 + C \\
&= \frac{2}{9} (x-3)^{9/2} + \frac{18}{7} (x-3)^{7/2} + \frac{54}{5} (x-3)^{5/2} + 18(x-3)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.43.

$\text{ekok}\{4, 5\} = 20 \Rightarrow t^{20} = x+1, 20t^{19} dt = dx, x = t^{20} - 1$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3 + \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}} dx &= \int \frac{3 + \sqrt[4]{t^{20}}}{\sqrt[5]{t^{20}}} (20t^{19} dt) \\
&= \int \frac{3 + t^5}{t^4} (20t^{19}) dt \\
&= 20 \int \left(t^{20} + \frac{3t^{19}}{t^4} \right) dt \\
&= \frac{20}{21} t^{21} + \frac{15}{4} t^{16} + C \\
&= \frac{20}{21} (x+1)^{21/20} + \frac{15}{4} (x+1)^{4/5} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.44.

$u = x, dv = e^x dx, du = dx, v = e^x, \int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\
&= x e^x - e^x + C \\
&= e^x (x - 1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.45.

$u = x^2$, $dv = e^x dx$, $du = 2x dx$, $v = e^x$, $\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.46.

$y = f(x)$, Ox , $x = a$, $x = b$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan,

$$\int_a^b f(x) dx \quad (27.25)$$

belirli integrine eşittir.

Örnek 27.47.

$y = 2x$ eğrisi, Ox doğrusu, $x = 1$ ve $x = 2$ doğrularının sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.

$$A = \int_1^2 2x dx \quad (27.26)$$

$$= x^2 \Big|_1^2 \quad (27.27)$$

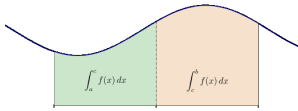
$$= 2^2 - 1 = 3 \quad (27.28)$$

$$A = \frac{2+4}{2} \times 1 = 2 \quad (27.29)$$

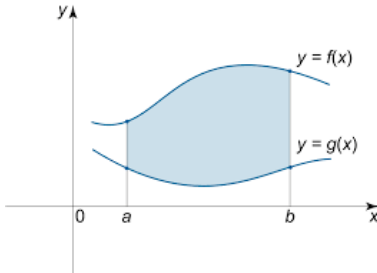
Aynı sonucu, Şekil 28.5'deki yamuğun alan formülü ile de bulabiliriz. Anımsayacağınız gibi, yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yarısının yüksekliği ile çarpımına eşittir.

Bazı aralıklarda $y = f(x)$ fonksiyonu negatif değerler alabilir. O zaman (28.26) Riemann toplamındaki negatif y_i ler için gikdörtgen alanları negatif olur. Oysa, düzlemsel alanın değeri daima pozitif olmalıdır. Negatif alan tanımlı değildir. O nedenle, negatif alanları pozitif yapmalıyız. Bunu yapmak için fonksiyonun negatif değerler aldığı aralıkları saptar ve onlar için bulduğumuz belirli integrali pozitif yaparız. Bu eylemi pratik bir formüle bağlamak da mümkündür:

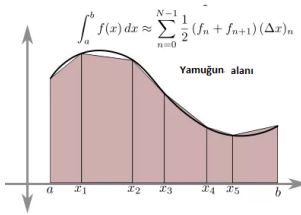
$$A = \int_a^b |f(x)| dx \quad (27.30)$$

Örnek 27.48.

Şekil 27.1: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması

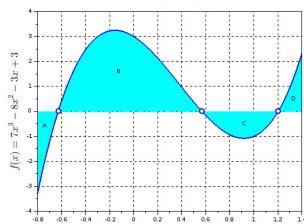


Şekil 27.2: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması



55

Şekil 27.3: Yamuğun Alanı



Şekil 27.4: Negatif Alanlar

eğrisi altında ve $[\frac{1}{2}, 1]$ aralığı üzerinde kalan alanı bulunuz. Verilen bölgede $y = \cos x$ fonksiyonu pozitif değerler aldığı için, istenen alan,

$$A = \int_{0.5}^1 \cos x dx = \sin x \Big|_{0.5}^1 \quad (27.31)$$

$$= \sin(1) - \sin(0.5) \quad (27.32)$$

$$= 0.841 - 0.479 \quad (27.33)$$

$$= 0.362 \quad (27.34)$$

olur.

Örnek 27.49.

Yarıçapı $r = 3$ olan dairenin üst yarı düzlemdeki alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} 3\sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt, \quad [x = 3 \sin t, \quad dx = 3 \cos t dt] \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{9}{2} t + \frac{9}{2} \int \cos 2t dt \\ &= \frac{9}{2} t + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{2} \sin^{-1}(1) \\ &= \frac{9\pi}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{9\pi}{4} \end{aligned}$$

olur.

Uyarı 27.50. Aşağıdaki integral formülünü kullanılırsa aynı sonuç elde edilir.

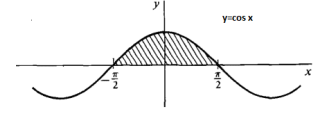
$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Örnek 27.51.

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = 9$$

Örnek 27.52.

$$\begin{aligned} \int_0^2 (4x^3 - 9x^2) dx &= 4 \int_0^2 x^3 dx - 9 \int_0^2 x^2 dx \\ &= (x^4 - 3x^3) \Big|_0^2 \\ &= 2^4 - 3(2)^3 \\ &= 16 - 24 = -8 \end{aligned}$$



Şekil 27.5: $y = \cos x$ altındaki Alan

Örnek 27.53.

$$\int_{-2}^0 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{8}(2x-1)^4 \Big|_{-2}^0 = -78$$

Örnek 27.54.

$y = x^2 - 4x + 5$ ile $y = 2x - 3$ eğrileri arqasında kalan alanı bulunuz.

$$\begin{aligned} \int_1^3 [(x^2 - 4x + 5)] dx &= \int_2^4 (-x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x \right|_1^3 = \left(\frac{64}{3} + 48 - 32 \right) \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

Örnek 27.55.

$$\int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} = \frac{8}{\ln 2}$$

Örnek 27.56.

$$\int_0^{2\sqrt{2}} (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{22\sqrt{2}}{3}$$

Örnek 27.57.

$y = 1 - x^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} (1 - x - x^2) dx = \frac{5}{6} = 1.86339$$

Örnek 27.58.

$y = 16x - 10x^2 + x^3$ ile $y = -16x + 10x^2 - x^3$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_0^2 (32x - 20x^2 + x^3) dx + \int_2^8 (32x - 20x^2 + x^3) dx = \frac{1136}{3} = 378.667$$

Örnek 27.59.

$y = |x|$ ile $y = 6 - x^2$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{-3}^3 (6 - x^2 + |x|) dx = 27$$

Örnek 27.60.

$[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde $y = \sin x$ ile $y = \cos x$ eğrileri arasında ve [kalan alanı bulunuz.

$$\int_0^{\pi/4} (\cos - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (-\cos + \sin x) dx = 2\sqrt{2} \approx 2.82843$$

27.7 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$1. \int \frac{3dx}{3x-4}$$

$$2. \int \frac{dx}{3-5x}$$

$$3. \int \frac{xdx}{\pi x-3}$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{x-3}$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2-4}$$

$$6. \int \frac{dx}{3-x^2}$$

$$7. \int \frac{x^2}{x^2+2x-2}$$

$$8. \int \frac{xdx}{3-x^2}$$

$$9. \int \frac{dx}{a^2-x^2}$$

$$10. \int \frac{1}{a^2-b^2x^2} dx$$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$1. \int \frac{x-3}{x^2+x} dx$$

$$2. \int \frac{1}{9x+x^3} dx$$

$$3. \int \frac{1}{9x^2-6x+2} dx$$

$$4. \int \frac{x}{2+6x+9x^2} dx$$

$$5. \int \frac{1+x^2}{9x^2-6x}$$

$$6. \int \frac{1+x^3}{x^2+7x+12} dx$$

$$7. \int \frac{x^3}{x^3-a^3}$$

$$8. \int \frac{dx}{2x+2x^2+x^3}$$

$$9. \int \frac{1}{x^4-3x^3}$$

$$10. \int \frac{x}{1-x+x^2} dx$$

27.8 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa

Bir fonksiyonun integralini almak demek, o fonksiyonu türev kabul eden fonksiyonları bulmak demektir. Öyleyse, işin esası (f, f') (fonksiyon-türevi) eşleşmesidir. Bir fonksiyonun sonsuz çokluktaki belirsiz integralleri (ilkelleri) birer sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğuna göre, sabiti ihmal ederek (f, f') eşleşmesini bire bir imiş gibi görebiliriz.

Calculus'ta türev alma kuralları integral alma kurallarından daha yeteneklidir. Türevi olan her fonksiyonun türevini bulmamızı sağlar. Ama bu kesimde göreceğimiz gibi, integral alma kurallarımız çok yetenekli değildir. Bir fonksiyonun integralinin varlığını biliyor olsak bile, bazen o integrali bulamayabiliriz. Bunun tipik örneğı $\int e^{x^2} dx$ integralidir. integrand sürekli olduğu için, integralin varlığını biliyoruz, ama e^{x^2} fonksiyonunu türev olarak kabul eden fonksiyonu bilmiyoruz.

İntegral alma eyleminde genel sayılacak tek kural, integrandı türev kabul eden fonksiyonun bulunması eylemidir. Bu eylem sonuç olarak (f, f') eşleşmesine indirgenir. Bütün integral alma yöntemleri sonunda (f, f') eşleşmesini kullanır. O nedenle ne kadar çok fonksiyonun türevini biliyorsak, ters işlemi, yani türevden ilkel fonksiyonu bulma eylemini de o kadar biliyor oluruz. Bunun için türev alma kuralları bize çok bilgi veriyor. Sabitler, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, ters fonksiyonlar gibi bir sınıflandırmayla pratikte çok kullanılan fonksiyonların türevlerini listeleyebiliyoruz. Oradan ters dönüşüm yaparak (f, f') eşleşmesine dönebiliriz.

Genel geçerliği olan yöntem olmadığı için, fonksiyonları alt sınıflara ayırıp, her sınıf için geçerli olan integral alma yöntemlerini ortaya koyacağız. Yukarıda da söylediğimiz gibi, alt sınıflara bölme sorunu tam çözülüyor. Ama oldukça iyi sonuçlar veriyor. Bilmemiz gereken şey, hangi alt sınıfta hangi yöntemi kullanıyorsak kullanalım, sonuçta (f, f') eşleşmesini kurabilirsek integrali çözmüş oluyoruz.

Doğal olarak, alt sınıflarda integral alırken bazı kurallar ortaya çıkıyor. Onları birer alet (fomül) olarak kullanıyoruz. Aletler çok işimize yarar.

Alt sınıflara bölme eylemi için de genel geçerliği olan yöntemden söz edilemez. Ama tarih boyunca sınama-yanılma yöntemiyle ortaya çıkarılan bazı sınıflar oldukça standart sayılır. Bu kesimde onları ele alacağız. Yine de ele aldığımız alt sınıfların tam bir liste oluşturmadığını bilmeliyiz.

27.9 Sürekli Fonksiyonların İntegrali

Sürekli fonksiyonların ilkelleri vardır. Bunu bir teoremle ifade edebiliriz:

Teorem 27.61. *I aralığında $f(x)$ sürekli ve her $a \in I$ noktasında, değişken x değeri için*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (27.35)$$

ise $F(x)$ fonksiyonu I aralığında $f(x)$ fonksiyonunun ilkelidir. Başka bir deyişle, her $x \in I$ noktasında $F'(x) = f(x)$ olur.

İspat:

x ile $x + \Delta x$ noktaları I aralığında iseler;

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

yazılabilir. Sağ yandaki ifadeye integralin ortalama değer teoremini uygularsak,

$$F(x + \Delta x) - F(x) = (x + \Delta x - x)f(c) = f(c)\Delta x$$

bağıntısını sağlayan ve Δx sayısının pozitif ya da negatif oluşuna bağlı olarak değişmek üzere

$(x \leq c \leq x + \Delta x)$, $(x + \Delta x \leq c \leq x)$ aralıklarının birinde olan bir c noktasının varlığını söyleyebiliriz. c noktası Δx değerine bağlıdır: $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow c \rightarrow x$ olur. f sürekli olduğundan $\Delta x \rightarrow 0$ iken $f(c) \rightarrow f(x)$

olacaktır. Buradan türev tanımına geçerse,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olur ki bu istenen sonuçtur.

27.10 Değişken Değiştirme

Belirsiz integral alırken, genellikle ilkel fonksiyonu hemen göremeyiz. O durumlarda, uygun bir değişken değiştirme (yerine koyma) ile integrali bilinen bir biçime sokarız. Bunu yaptıran kural şudur.

Teorem 27.62. $f(u)$ sürekli ve $u(x)$ sürekli türevi var olan bir fonksiyon ise

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=u(x)} \quad (27.36)$$

Sağ yandaki terimin anlamı açıktır. $\int f(u) du$ integrli bulunduğundan sonra $u = u(x)$ konularak x değişkenine dönülür.

İspat:

$F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonunun ilkel olsun. F nin varlığı f nin sürekliliği ile garanti edilir. Bkz (25.1). Zincir kuralı gereğince,

$$\frac{d}{dx} F(u(x)) = F'(u(x))u'(x)$$

yazabiliriz. Öyleyse,

$$\begin{aligned} \int f(u(x))u'(x) dx &= \int F'(u(x))u'(x) dx \\ &= F(u(x)) + C \quad (C \text{ sabit}) \end{aligned}$$

Son iki ifadeden, aranan (25.2) eşitliği çıkar.

Değişken değiştirmede, integranddaki asıl değişkenin yerine hangi değişkenin konulacağını söyleyen genel bir yöntem yoktur. Bu eylem integrali alanın deneyimine bağlı bir tür sınamaya-yanılma sürecidir. İntegral kavramı ortaya çıktığından beri çok sayıda sınamaya-yanılma yapılmış ve başarılı olanlar öne çıkmıştır. Aslında bütün integral alma eylemleri öyledir. Genel yöntem ortaya konamayınca, problem alt sınıflara bölünür ve her bir alt sınıfta geçerli olan çözüm yolları ortaya konulur.

Örnek 27.63. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = \sin x \rightarrow du = \cos x dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos x dx &= \int u^3 du \\ &= \frac{1}{4} u^4 \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.64. $\int \sin^3 x dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Burada ilk örnekteki değişken değiştirme, integrandın ilkelini bulmaya yarayacak iyi bir sonuç vermez. Trigonometrik formülleri kullanarak biraz işlem yaparsak, $u = \cos x \rightarrow du = -\sin x$ konumunun daha iyi sonuç vereceği görülebilir:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int (\sin^2 x) \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\ &= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx \\ &= -\cos x + \int u^2 du \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C \\ &= \frac{1}{4} u^4 \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.65. $I = \int (1 - 2x)^9 x dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu integrali hesaplamak için akla ilk gelen yol, integrandın binom formülüne göre açmak, sonra çıkan polinomu terim terime integre etmektir. O yöntem doğru ama uzun bir yöntemdir. Onun yerine $u = 1 - 2x$, $du = -2dx$ konumu işlemleri çok kısaltacaktır:

$$\begin{aligned} \int (1 - 2x)^9 x dx &= -\frac{1}{2} \int (1 - 2x)^9 (-2dx) \\ &= -\frac{1}{2} \int (u)^9 (du) \\ &= -\frac{1}{20} u^{10} + C \\ &= -\frac{1}{20} (1 - 2x)^{10} + C \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.66. $I = \int_{+3}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

İntegrali alınacak ifadeyi karekökten kurtarmak için $x = \frac{3}{\cos t}$, $dx = 3 \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$ ve sınırlar için, $2\sqrt{3} = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$; $+3 = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow T = 0$ konumu

yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} \cdot \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{3 \sin t} \cdot \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec t dt \\
 &= \ln |\sec t + \tan t|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= \ln \left| \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right| - \ln |1 + 0| \\
 &= \ln \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Örnek 27.67. $I = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekök ile küp kökü yoketmek için 2 il 3 sayılarının ek küçük ortak katını (ekok) alalım. $x = t^6$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5 dt$ konumuyla

$$\begin{aligned}
 I &= 6 \int \frac{t^8}{t^2 - 1} dt \\
 \frac{t^8}{t^2 - 1} &= t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= 6 \int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt \\
 &= 6 \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C \\
 &= 6 \left(\frac{x^{7/6}}{7} + \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + x^{1/6} + \frac{1}{2} \left| \frac{x^{1/6} - 1}{x^{1/6} + 1} \right| \right) + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.68. $I = \frac{x^4}{x^2+1} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: payın drecesi paydanın derecesinden küçük olmadığı için, önce payı paydaya bölmeliyiz.

$$\begin{aligned}
 I &= \int dx - \int 2dx x^2 + 1 + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= x - 2 \arctan x + \left(\frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.69. $I = \frac{dx}{x^2+1} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = \tan t$, $dx = \sec^2 t dt$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sec^2 t}{(\tan^2 t + 1)^2} \\
 &= \int \cos^2 t dt \\
 &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C \\
 &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cdot \cos t + C \\
 &= \frac{1}{2} \left(\arctan x + \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) \right) + C
 \end{aligned}$$

27.11 $\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu

Bazı integrallerde değişken değişirimi işi kolaylaştırır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 x &= \tan \frac{\theta}{2} \\
 \cos \theta &= \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \\
 \sin \theta &= \frac{2x}{1 + x^2} \\
 d\theta &= \frac{2dx}{1 + x^2} \\
 \theta &= 2 \arctan x \\
 x &= a \sin \theta \Leftrightarrow \theta = \arcsin \frac{x}{a} \\
 x &= a \tan \theta \Leftrightarrow \theta = \arctan \frac{x}{a} \\
 x &= a \sec \theta \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} = \arccos \frac{x}{a}
 \end{aligned}$$

değişken değişirimleri kullanılabilir.

Örnek 27.70.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \tan \frac{\theta}{2}, \cos \theta = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \sin \theta = \frac{2x}{1 + x^2}, d\theta = \frac{2dx}{1 + x^2}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1 + \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}} \\
 &= \int \frac{2x}{2x+2} \\
 &= \int \frac{dx}{x+1} \\
 &= \ln|x+1| \\
 &= \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} + 1 \right|_0^{\pi/2} \\
 &= \ln 2 - \ln 1 \\
 &= \ln 2
 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.71.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \frac{1}{2} \sin t, dx = \frac{1}{2} \cos t dt, 1-4x^2 = 1-4 \cdot \frac{1}{4} \sin^2 t = 1-\sin^2 t = \cos^2 t, 2x = \sin t, t = \arcsin(2x)$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\
 &= \int \frac{(1/2) \cos t}{\cos t} dt \\
 &= \frac{1}{2} t + C \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin(2x) + C
 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.72.

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}} dx \\
 &= \int \frac{\frac{1}{4} \sin^2 t}{\cos t} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{(1-\cos^2 t)}{\cos t} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos t} dt - \frac{1}{4} \int \cos t dt \\
 &= \ln|\sec x + \tan x| + C
 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.73.

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = 3 \sin t, dx = 3 \cos t dt, 9 - x^2 = 9 \cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx \\ &= \int \frac{9 \cos^2 t}{3 \cos t} dt \\ &= 3 \int \cos t dt \\ &= 3 \sin t + C \\ &= 3 \arcsin \frac{x}{3} + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.74.

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \frac{1}{2} \sin t, dx = \frac{1}{2} \cos t dt, 1 - 4x^2 = \cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2} \cos t}{\frac{1}{2} \sin t \cdot \cos t} dt \\ &= \int \frac{dt}{\sin t} \\ &= \int \sec t dt \\ &= \frac{\sec t (\sec t + \tan t)}{\sec t + \tan t} \end{aligned}$$

$$u = \sec t + \tan t, du = \sec t \tan t + \sec^2 t = \sec t (\sec t + \tan t)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln |\sec t + \tan t| + C \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2} \sin t \Rightarrow 2x = \sin t \Rightarrow \sec t = \frac{1}{2x}$$

konumuyla,

$$I = \ln \left| \frac{1}{2x} + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} \right| + C$$

bulunur.

Örnek 27.75.

$$I = \int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x dx$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx \\ &= \int \frac{(1-u^2)^2}{\sqrt{u}} du \\ &= -\int (u^{\frac{7}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}) du \\ &= -\frac{2}{9} u^{\frac{9}{2}} + \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{9} (\cos x)^{\frac{9}{2}} + \frac{4}{5} (\cos x)^{\frac{5}{2}} - 2(\cos x)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

27.12 Kısmi İntegrasyon

İntegrali alınacak fonksiyonun ilkeli hemen görülemiyor, değişken değiştirimi için uygun bir değişken bulunamıyor ise kısmi integrasyon denilen yöntem bazen çözüm için uygun yol olabilir. Bu yöntem aslında iki fonksiyonun çarpımının türevine dayalıdır:

$$\int u dv \tag{27.37}$$

integralini arıyor olalım. uv çarpımının diferensiyeli olan

$$d(uv) = u dv + v du$$

eşitiğinin iki yanının integralleri de eşit olmalıdır:

$$uv = \int u dv + \int v du$$

Buradan

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{27.38}$$

bağıntısı çıkar. Bu aradığımız (25.5) integralidir. Bundan böyle (25.6) eşitliğini bir formül olarak kullanacağız. Bu yöntem öncelikle integrali alınacak fonksiyonun $uv dx$ biçiminde yazılabildiğini ve bir ya da ardışık kısmi integrasyon uygulamalarından u çarpanının yok olmasını gerektirir. Aşağıdaki örnekler, kısmi integrasyon yönteminin nasıl çalıştığını gösterecektir.

Örnek 27.76.

$$\int x e^x dx \tag{27.39}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

İntegrandı iki fonksiyonun çarpımı biçimine getirelim: $u = x$, $dv = e^x dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C\end{aligned}$$

Uyarı: Yukarıdaki değişken değiştirme eyleminde $u = e^x$, $dv = x dx$ alınmış olsaydı

$$\int x e^x dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$$

gibi çözümü aslından daha zor olan bir integral ortaya çıkardı. O nedenle, kısmi integrasyon kullanılırken, işlem sonunda çarpanlardan birisinin yok olması önem kazanır.

Örnek 27.77.

$$\int \cos x e^{-x} dx \quad (27.40)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Türev ve integral işlemlerinde e^{-x} yok olmayacağına göre $\cos x$ fonksiyonu yok olması gereken fonksiyon olarak karşımıza çıkar. Tabii, bu fonksiyon da bir kez türev ya da integral olarak yok edilemez. Ama ii defa türev alınca, kendisine eşit olacağından, bir aritmetik işlemle istenen integrali elde edebiliriz:

$$\int \cos x e^{-x} dx = \sin x e^{-x} + \int \sin x e^{-x} dx$$

Sondaki integrale tekrar kısmi integral uygularsak,

$$\int \sin x e^{-x} dx = \sin x e^{-x} - \int \cos x e^{-x} dx$$

çıkar. Son iki ifadeyi bir araya getirirsek,

$$\int \cos x e^{-x} dx = \sin x e^{-x} - \cos x e^{-x} - \int \cos x e^{-x} dx \quad (27.41)$$

Dikkat edersek, son ifadedeki iki integral aynıdır. Dolayısıyla, eşitliği

$$\int \cos x e^{-x} dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C \quad (27.42)$$

biçiminde yazabiliriz.

Örnek 27.78.

$$\int (3x+5) \cos \frac{x}{4} dx \quad (27.43)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Kısmi integrasyon uygularken polinom biçimindeki fonksiyonların ilk adımda ya da ardışık adımlarda yok olacağını düşünerek,

$$u = 3x+5, dv = \cos \frac{x}{4}, du = 3dx, v = 4 \sin \frac{x}{4}$$

konumlarını yapabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned}\int (3x+5) \cos \frac{x}{4} dx &= 4(3x+5) \sin \frac{x}{4} - 12 \int \sin \frac{x}{4} dx \\ &= 4(3x+5) \sin \frac{x}{4} + 48 \cos \frac{x}{4} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 27.79.

$$\int x^2 \sin(10x) dx \quad (27.44)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$u = x^2, dv = \sin(10x) dx, du = 2x dx, v = -\frac{1}{10} \cos(10x)$$

konumu yapılırsa, kısmi integrasyon formülünden

$$x^2 \sin(10x) dx = -\frac{x^2}{10} \cos(10x) + \frac{1}{5} \int x \cos(10x) dx$$

yazılabilir. Şğıdaki integral için bir kez daha kısmi integrasyon uygulanabilir:

$$u = x, dv = \cos(10x), du = dx, v = \frac{1}{10} \sin(10x)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(10x) dx &= -\frac{x^2}{10} \cos(10x) + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{10} \sin(10x) - \frac{1}{10} \int \sin(10x) dx \right) \\ &= -\frac{x^2}{10} \cos(10x) + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{10} \sin(10x) + \frac{1}{100} \cos(10x) \right) + C \\ &= -\frac{x^2}{10} \cos(10x) + \frac{x}{50} \sin(10x) + \frac{1}{500} \cos(10x) + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.80.

$$I = \int_0^1 \arctan x dx, \quad (27.45)$$

integralini bulunuz.

Çözüm: Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned} I &= \int \arctan x dx \\ &= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Örnek 27.81.

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx, \quad (ab \neq 0) \quad (27.46)$$

interalini bulunuz.

Çözüm:

$$u = e^{ax}, du = ae^{ax} dx, dv = \cos bx, dxv = \frac{1}{b} \sin bx$$

konumuyla Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \cos bx dx \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx \\ &= \frac{1}{b} c \sin bx - \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I + C \end{aligned}$$

Burdan

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{a}{b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

bulunur.

Benzer olarak

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

eşitliği elde edilebilir.



Şekil 27.6: Hermann Schubert



Şekil 27.7: Leopold Kronocker

7.13 Polinomların Çarpanlara Ayrılması

Polinomların kökleri uygulamada önemli rol oynar. O nedenle polinomlar işlenirken bu konuya ağırlık verilir. Benzetmek gerekirse, bir polinomun çarpanlarına ayrılması bir sayının asal çarpanlarına ayrılması gibidir. Tabii, sayılarda var olan bütün özellikler polinomlarda olmaz.

Polinomları çarpanlarına ayırma konusu ilk kez 1793 yılında Hermann Schubert tarafından ortaya konulmuş 1882 yılında Leopold Kronecker bulduğu bir algoritma ile konuyu genelleştirmiştir. Bugün polinomu çarpanlara ayırma işlemi bilgisayar cebirinin temel taşlarından birisidir.

Bu kitapta polinomu çarpanlarına ayırma işlemi rasyonel fonksiyonların integralini bulmak için kullanılacaktır. O nedenle, bu kesimde bir $q(x)$ polinomunun çarpanlarına ayrılışını bize gerektiği kadarıyla ele alacağız. Önce iyi bilinen temel bilgileri anımsayalım:

Gerçek katsayılı her $Q(x)$ polinomu doğrusal ve quadratik çarpanlarının çarpımı olarak yazılabilir.

Tanım 27.82. *Katsayıları gerçel olan bir*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad (27.47)$$

polinomunu düşünelim. Eğer

$$(x - c)^k S(x) \quad (27.48)$$

eşliğini sağlayan bir $S(x)$ polinomu varsa c sayısı $q(x)$ polinomunun k -katlı bir köküdür.

$k = 1$ ise c sayısı tek katlı kök olur. n -inci dereceden bir polinomun n tane kökü vardır. Burada c sayısı $q(x)$ polinomunun k -katlı kökü ise geri kalan köklerin sayısı $n - k$ tanedir ve onlar $S(x)$ polinomunun kökleri olur. Kökler gerçel ya da karmaşık sayı olabilirler.

Teorem 27.83. *Özdeş iki polinomun aynı dereceli terimlerinin katsayıları birbirlerine eşittir.*

İspat: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$
ve

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m$$

polinomları özdeş olsunlar. O zaman farkları 0'a özdeş olmalıdır:
 $n > m$ ise

$$\equiv p(x) - q(x) \quad (27.49)$$

$$\equiv (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_m - b_m)x^m + a_{m+1}x + \dots + a_n x^n \quad (27.50)$$

olmalıdır. Bunun olabilmesi için

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_m = b_m, a_{m+1} = 0, \dots, a_n = 0 \quad (27.51)$$

$n < m$ ise benzer düşünce geçerlidir.

Teorem 27.84. $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$ polinomunun $(x - c)q_1(x)$ biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve yeterli koşul c nin bir kök olması; yani $q(c) = 0$ olmasıdır.

İspat:

$q(x)$ polinomu $x - c$ ile tam bölünebiliyorsa $q(c) = 0$ olacağından,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x) - q(c) \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n - (\\ &\quad b_0 + b_1c + b_2c^2 + b_3c^3 + \dots + b_{n-1}c^{n-1} + b_nc^n) \\ &= b_1(x - c) + b_2(x^2 - c^2) + b_3(x^3 - c^3) + \dots + b_n(x^n - c^n) \end{aligned} \quad (27.52)$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + c^{n-1}), \quad (n = 1, 2, \dots, m) \quad (27.53)$$

dir. (39.19) ve (39.20) bağıntılarından istenen çıkar.

Polinomun bazı kökleri tamsayı olabilir.

Örnek 27.85.

$$q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad (27.54)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Baş katsayısı 1 olan bir polinomun tam sayı kökü varsa sabit teriminin bir çarpanıdır. Burada sabit terim 2'dir. 2'nin çarpanları $\pm 1, \pm 2$ olmak üzere dört tanedir. Bunlar arasında $c_1 = 2$ sayısı $q(c_1) = 0$ eşitliğini sağlar. O halde,

$$q(x) = (x - 2)q_1(x) = (x - 2)(x^2 - 1) \quad (27.55)$$

yazılabilir. Tekrar $q_1(x)$ polinomunun köklerini bulmamız gerekiyor. Bu polinom ikinci dereceden olduğu için köklerini formülden bulabiliriz: $c_2 = -1$ $c_3 = +1$ olur. $q(x)$ polinomunun üç kökünü de bulduğumuza göre onu

$$q(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 1) \quad (27.56)$$

biçiminde çarpanlarına ayırabiliriz.

Polinomun bazı kökleri irrasyonel sayı olabilir.

Örnek 27.86.

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \quad (27.57)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 6 sayısının çarpanları $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ sayılarıdır. Bunlar arasında $p(c) = 0$ yapan tek sayı $c_1 = 3$ sayıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x - 3)q_1(x)(x - 3)(x^2 - 2) \quad (27.58)$$

olur. Geriye kalan $q_1(x) = (x^2 - 2)$ polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri $\pm\sqrt{2}$ dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x - 3)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \quad (27.59)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Örnek 27.87.

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda x değişkeninin her terimde olduğu apaçık görünüyor. Öyleyse,

$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$

yazabiliriz. Parantez içindeki polinomun tamsayı kökleri varsa 8 sabitinin çarpanları olacağından, $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ sayılarının kök olup olmadıklarını denememiz. $c = 2$ sayısı için $q_1(2) = 0$ olduğu; yani $c_2 = 2$ sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x-2)q_2(x) = x(x-2)(x^2 - 2x - 4)$$

yazılabilir. Burada geriye kalan $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$ ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. O halde, $q(x)$ polinomu

$$q(x) = x(x-2)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Polinomun bazı kökleri karmaşık sayı olabilir.

Örnek 27.88.

$$q(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: Beşinci dereceden olduğu için bu polinomun beş tane kökü olduğu biliniyor. Ancak üçüncü dereceden büyükler için kökü bulmamızı sağlayan bir formül yoktur. Sabit terimin $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ sayılarından $+1$ sayısının kök olduğu denenerak görülebilir. $q(x) = (x+1)q_1(x)$ yazarsak $q_1(x) = (x^2 + 2)^2$ olduğu ve $q_1(x)$ polinomunun gerçel kökünün olmadığı görülür. Geri kalan dört kökün dördü de karmaşık sayıdır.

$$q(x) = (x+1)(x^2 + 2)^2.$$

Örnek 27.89.

$$q(x) = 8x^4 - 4x^3 + 10x^2$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: Dördüncü dereceden olan bu polinomun 4 tane kökü vardır. $2x^2$ çarpanı ortak olduğu için polinomu,

$$q(x) = 2x^2(4x^2 - 2x + 5)$$

biçiminde çarpanlara ayırsak, $(4x^2 - 2x + 5)$ çarpanının ikinci dereceden ve gerçel kökü olmadığı görülür. Kökler

$$x_1 = 0.25 + 1.0897247358852i, \quad x_2 = .25 - 1.0897247358852i$$

dir. Öyleyse,

$$q(x) = 2x^2(x - .25 + 1.0897247358852i) \cdot (x - .25 - 1.0897247358852i)$$

olur.

27.14 Basit Kesirlere Ayırma

İki polinomun oranı biçiminde yazılan fonksiyonlara rasyonel fonksiyon denilir. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinde $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden daha küçükse, rasyonel fonksiyona basit, değilse bileşik kesir denilir.

$Q(x)$ paydasının $(x - a_k)^m$ bir çarpan ve $(x^2 + px + q)^r$ bir quadratik çarpan ise rasyonel fonksiyon

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(x - a_k)^k} + \sum_{r=1}^R \frac{b_mx + C_m}{(x^2 + px + q)^r}$$

biçiminde basit kesirlere ayrılır. Sonra her basit kesir için kendi sınıfına ait integral yöntemi uygulanır.

27.15 Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi

Şimdi en basit halden başlayarak rasyonel fonksiyonların integrallenmesini inceleyeceğiz.

Örnek 27.90.

$$I = \int \frac{1}{1-x^2} dx \quad (27.60)$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\ \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} &\equiv \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\ \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} &\equiv \frac{A(1+x) + B(1-x)}{1-x^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} &\equiv \frac{(A-B)x + (A+B)}{1-x^2} \\ \Rightarrow (A-B) &= 0, (A+B) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \right) \end{aligned}$$

Artık sağ taraftaki basit kesirlerin integralleri alınabilir:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\ln(1+x) - \ln(1-x)) + \ln C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| C \frac{(1+x)}{(1-x)} \right| \end{aligned}$$

Örnek 27.91.

$$I = \int \frac{x^5 + 2}{x^2 - 1} dx \quad (27.61)$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

İntegrali alınacak fonksiyonun payının derecesi paydanın derecesinden büyük olduğu için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^5 + 1}{x^2 - 1} = x^3 + x + \frac{x + 2}{x^2 - 1} \quad (27.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{x^2 - 1} &= \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)} \Rightarrow \\ \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Rightarrow \\ &= \frac{A(x + 1)}{x - 1} + \frac{B(x + 1)}{x - 1} \Rightarrow \\ &= \frac{(A + B)x + (A - B)}{x^2 - 1} \\ &\Rightarrow A = 3/2, B = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bulduğumuz bu deperleri (25.35) eşitliğinde kullanırsak,

$$\frac{x^5 + 2}{x^2 - 1} = x^3 + x - \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x - 1} \quad (27.63)$$

olur. Sağ yandaki terimler integrallenebilir olduğundan

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^5 + 2}{x^2 - 1} dx \\ &= \int x^3 dx + \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx \\ &= \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + \frac{3}{2} \ln|x - 1| + C \end{aligned}$$

Örnek 27.92.

$$I = \int \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Kısmi kesirlerine ayırıp integrale geçilirse,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2 + 2} + \int \frac{xdx}{(x^2 + 2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 2)} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 2)} + \frac{1}{4} \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Örnek 27.93.

$$I = \int \frac{6x^3 + 5x^2 + 21x + 12}{x(x + 1)(x^2 + 4)} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{6x^3 + 5x^2 + 21x + 12}{x(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$6x^3 + 5x^2 + 21x + 12 \equiv A(x+1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x(x+1) \\ \equiv (A+B+C)x^3 + (A+D+C)x^2 + (4A+4B+D)x + 4A$$

$$\Rightarrow A+B+C=6$$

$$A+C+D=5$$

$$4A+4B+D=21$$

$$4A=12$$

$$\Rightarrow A=3, B=2, C=1, D=1$$

Bunları yerlerine koyarsak, integral,

$$I = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+4} dx \\ = 3 \ln|x| + 2 \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{2} + C \\ = \ln|x^3(x+1)^2 \sqrt{x^2+4}| + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{2} + C$$

Örnek 27.94.

$$I = \int \frac{x^5 - x^4 - 3x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{x^5 - x^4 - 3x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = (x+1) + \frac{-2x+4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} \\ = (x+1) + \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} \\ = (x+1) + \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$I = \int \left((x+1) + \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ = \frac{1}{2} x^2 + x + \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Örnek 27.95.

$$I = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x^2 - 3x) + 4 \\ = 2 \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} + 4 - \frac{9}{2} \right) \\ = 2(u^2 - a^2) \quad \Rightarrow u = x - \frac{3}{2}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad du = dx \\ x+1 = u + \frac{5}{2}$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{u + \frac{5}{2}}{\sqrt{2(u^2 - a^2)}} du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{udu}{\sqrt{u^2 - a^2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{udu}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int 2z^{-\frac{1}{2}} dz + C_1 \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{z} + C_1 \\
 &= \sqrt{\frac{u^2 - a^2}{2}} + C_1
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C_2$$

O halde,

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= \sqrt{\frac{u^2 - a^2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C \\
 &= \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln \left| \left(x - \frac{3}{2}\right) + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right| + C
 \end{aligned}$$

çıkar.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2 - a^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} \\
 &= \sqrt{\frac{u^2 - a^2}{2}} + C_1
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C_2$$

Örnek 27.96.

$$I = \int \frac{1}{4x^2 + 4x + 2} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{4(x^2 + x) + 2} \\
 &= \int \frac{dx}{4(x^2 + x + \frac{1}{4}) + (2 - \frac{4}{4})} \\
 &= \int \frac{du}{4(u^2 + 1)}, \quad (u = x + \frac{1}{2}) \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2 + (\frac{1}{2})^2} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1/2} \arctan \frac{u}{1/2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{2} \arctan(2x + 1) + C
 \end{aligned}$$

27.16 Rasyonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması

Rasyonel fonksiyon iki polinomun bölümü biçiminde olan fonksiyonlardır:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_mx^m} \quad (27.64)$$

bu ifadede $n \geq m$ ise rasyonel fonksiyona bileşik kesir, $m < n$ ise basit kesir denilir. Başka bir deyişle, paydanın derecesi payın derecesinden küçükse rasyonel fonksiyona bileşik kesir, değilse basit kesir denilir. Bu sınıflandırma sayılardaki bileşik ve basit kesir tanımı gibidir.

Bileşik kesir halinde olan rasyonel fonksiyonlar basit kesirlerine ayrılabilir. Bunun için paydaki polinomun paydadaki polinoma bölünmesi yeterlidir. Bu bölme işlemi sonunda,

$$r(x) = p_1(x) + r_1(x) \quad (27.65)$$

gibi bir ifade çıkar. Burada, der simgesi polinomun derecesini göstermek üzere, $r_1(x)$ bir polinomdur ve derecesi $n - m$ dir. $r_1(x)$; yani

$$r_1(x) = \frac{p_2(x)}{q(x)} \quad (der\{p_2\} < der\{q\}) \quad (27.66)$$

biçiminde rasyonel bir fonksiyondur ve payın derecesi paydanın derecesinden kesinlikle küçüktür.

Bu türlerin integrali için parçalı kesirlere ayırma (partial fraction) yöntemi kullanılır. İntegrallenen rasyonel fonksiyon parçalı kesirlerine ayrılınca her terim bilinen yöntemlerle integrallenebilir hale gelir.

(25.37) biçiminde bir fonksiyonun integrali isteniyorsa, sırasıyla şu eylemler yapılır:

1. $p(x)$ polinomunun derecesi $q(x)$ polinomunkinden büyükse, önce

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + r_1(x) \quad (27.67)$$

bölme işlemi yapılır.

2. Bölme işleminin verdiği $p_1(x)$ polinomu terim terime integralenebilir.

3. Rasyonel $r_1(x)$ fonksiyonunun $q(x)$ paydası çarpanlarına ayrılır.
4. Her çarpana karşılık gelen basit kesirler bulunur.
5. Bulunan kesirlerin tek tek integralleri alınır.

Rasyonel fonksiyonun parçalı kesirlere ayrılması işlemi polinomların bir konusudur. Ama rasyonel fonksiyonların integralinde sık sık karşılaştığımız basit kesirlere ayırma işleminin esaslarını anlatmalıyız.

n -inci dereceden bir polinomun n tane kökü olduğunu biliyoruz. Önceki kesimde her köke karşılık polinomun bir çarpanı olduğunu söylemiştik.

Teorem 27.97. $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$ polinomunun $(x-c)q_1(x)$ biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve yeterli koşul c nin bir kök olması; yani $q(c) = 0$ olmasıdır.

Rasyonel fonksiyonların basit kesirlere ayrılışını gösteren aşağıdaki teoremin ispatı, bu kitapta olmayan bazı teknik bilgilere dayanır. O nedenle teoremi ispatsız olarak ifade edeceğiz:

Teorem 27.98. Basit kesir biçimindeki rasyonel $q(x)$ fonksiyonun paydası

$$q(x) = a(x-c_1)^{r_1} \dots (x-c_k)^{r_k} \left((x^2 + b_1x + d_1)^{s_1} \dots (x^2 + b_mx + d_m)^{s_m} \right) \quad (27.68)$$

biçiminde ve bu gösterimdeki iki doğrusal ya da kvadratik çarpan aynı değil ve indirgenemez ise $q(x)$ rasyonel fonksiyonu,

$$q(x) = B_{lin} + B_{quad} \quad (27.69)$$

biçiminde iki blok'un toplamına eşittir. Bu bloklar için aşağıdaki kurallar geçerlidir: Her farklı $(x-c_i)$ doğrusal çarpanı için, c_i k katlı kök ise,

$$B_{lin} = \frac{A_1}{(x-c_i)} + \frac{A_2}{(x-c_i)^2} + \dots + \frac{A_{r_i}}{(x-c_i)^{r_i}} \quad (27.70)$$

biçimindeki k terimli bir blok oluşur.

$(x^2 + b_ix + d_i)$ kvadratik çarpanı m -katlı bir çarpan ise

$$B_{quad} = \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + b_ix + d_i)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + b_ix + d_i)^2} + \dots + \frac{B_{s_i}x}{(x^2 + b_ix + d_i)^{s_i}} \quad (27.71)$$

biçimindeki m ögeli bir blok oluşur.

Bloklardaki A_h, B_s, C_t sabit katsayıları $q(x)$ polinomuna bağlı olarak tek olarak belirlenebilirler.

(39.101) ve (36.9) ifadelerinde terim sayıları ilgili kökün kaçınıcı dereceden katlı kök olduğuna bağlıdır. Örneğin, $r_k = 1$ ise c_1 tek katlı kök olur. Dolayısıyla, B_{lin} blokunun tek ögesi var olur. $\frac{A_1}{(x-c_1)}$ terimi (B_{lin}) blokunun biricik terimi olur. Benzer şekilde, $s_m = 1$ ise (36.9) blokunun biricik terimi $\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + b_1x + d_1)}$ olur.

İspat:

$q(x)$ polinomu $x-c$ ile tam bölünebiliyorsa $q(c) = 0$ olacağından,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x) - q(c) \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n - (\\ &\quad b_0 + b_1c + b_2c^2 + b_3c^3 + \dots + b_{n-1}c^{n-1} + b_nc^n) \\ &= b_1(x-c) + b_2(x^2 - c^2) + b_3(x^3 - c^3) + \dots + b_n(x^n - c^n) \end{aligned} \quad (27.72)$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + c^{n-1}), \quad (n = 1, 2, \dots, m) \quad (27.73)$$

dir. (39.19) ve (39.20) bağıntılarından istenen çıkar.

Örnek 27.99.

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \quad (27.74)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 6 sayısını çarpanları $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ sayılarıdır. Bunlar arasında $p(c) = 0$ yapan tek sayı $c_1 = 3$ sayıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x - 3)q_1(x)(x - 3)(x^2 - 2) \quad (27.75)$$

olur. Geriye kalan $q_1(x) = (x^2 - 2)$ polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri $\pm\sqrt{2}$ dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x - 3)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \quad (27.76)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Örnek 27.100.

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x \quad (27.77)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda x değişkeninin her terimde olduğu apaçık görünüyor. Öyleyse,

$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$

yazabiliriz. Parantez içindeki polinomun tamsayı kökleri varsa 8 sabitinin çarpanları olacağından, $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ sayılarının kök olup olmadıklarını denememiz. $c = 2$ sayısı için $q_1(2) = 0$ olduğu; yani $c_2 = 2$ sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x - 2)q_2(x) = x(x - 2)(x^2 - 2x - 4) \quad (27.78)$$

yazılabilir. Burada geriye kalan $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$ ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. O halde, $q(x)$ polinomu

$$q(x) = x(x - 2)(x + 14\sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5}) \quad (27.79)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

$$x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \quad (27.80)$$

27.17 Rasyonelleştirme

İntegrali alınacak fonksiyon köklü ifadeler içeriyor, ya da integrali bilinen bir tipten değilse, uygun bir değişken değiştirimi ile rasyonel fonksiyon haline getirilir ve ona rasyonel fonksiyon için bilinen integral alma yöntemleri uygulanır.

Örnek 27.101.

$$\int \frac{\sqrt{r} \, t \, x}{1 + \sqrt[3]{x}} \quad (27.81)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: İntegrali alınacak fonksiyon bir kare kök, bir de küp kök içeriyor. her iki köklü ifadeden kurtulmak için $u = \sqrt[3]{x}$, $x = u^6$, $6u^5 du = dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{u^3}{1 + u^2} du \\ &= \int (6u^6 - 6u^4 + 6u - 6 + \frac{1}{1 + u^2}) du \quad (\text{payı paydaya böl}) \\ &= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + \tan^{-1} u + C \\ &= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1} x^{\frac{1}{6}} + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.102.

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx \quad (27.82)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = 1 + e^x$, $\ln(u - 1) = x$, $\frac{1}{u-1} du = dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + e^x} dx &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= \int \frac{1}{1 + e^x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= \ln|u-1| - \ln|u| + \ln C \\ &= C \cdot \ln \left| \frac{u-1}{u} \right| \\ &= C \cdot \ln \left| \frac{e^x}{1 + e^x} \right| \\ &= C \cdot \ln \left(\frac{e^x}{1 + e^x} \right) \end{aligned}$$

27.18 Köklü İfadelerin İntegrali

Köklü ifadelerin integrali için kullanılan geçerli yöntem, integrandı kökten kurtaracak uygun bir değişken değiştirimi yapmaktır. Dolayısıyla bu kesimi (25.4) kesimi içinde görmek daha doğrudur. Birkaç örnek söylediğimiz kanıtlayacaktır.

Örnek 27.103.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\pi + 2x}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Burada zorluğu yaratan terim kareköklü terimdir. Karekökten kurtulmak için uygun bir değişken değiştirimi bulmalıyız. Deneyerek $u^2 = \pi + 2x$, $2udu = 2dx \Rightarrow dx = udu$ konumunun işe yaradığını

görebiliriz:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{\pi+2x}} dx &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}} \\
 &= \int \frac{udu}{u} \\
 &= \int du \\
 &= u + C \\
 &= \sqrt{\pi+2x} + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.104.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekökten kurtulmak için, $u^2 = 3x - 1$, $x = \frac{1}{3}(u^2 + 1)$, $2udu = dx$, $dx = \frac{2}{3}udu$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx &= \frac{2}{9} \int \frac{(u^2+1)}{u} udu \\
 &= \frac{2}{9} \int udu + \frac{2}{9} \int \frac{du}{u} \\
 &= \frac{1}{9} u^2 + \frac{2}{9} \ln|u| + C \\
 &= \frac{1}{9} (3x-1) + \frac{2}{9} \ln|\sqrt{3x-1}| + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.105.

$$\int (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} dx \quad (27.83)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Uygun bir değişken değiştirimi ile küp kökten kurtulmalıyız. Bunun için küp köklü ifadenin içinin $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ olduğunu görelim.

Sonra

$$u^3 = (x-2), \quad 3u^2 du = dx, \quad (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{\frac{10}{3}}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
 \int (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} dx &= \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2 - 4x + 4})^5} dx \\
 &= \int \frac{3u^2}{u^{10}} du \\
 &= -\frac{3}{7} u^{-7} + C \\
 &= -\frac{3}{7} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C
 \end{aligned}$$

Örnek 27.106.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \quad (27.84)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u^2 = x$, $2udu = dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 2 \operatorname{Arcsin} u + C \\ &= 2 \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 27.107.

$$I = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}2x^2 - 6x + 4 &= 2(x^2 - 3x) + 4 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 4 - \frac{9}{2} \\ &= 2(u^2 - a^2)\end{aligned}$$

$$u = x - \frac{3}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$du = dx$$

$$x + 1 = u + \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{(u + \frac{5}{2})du}{\sqrt{2(u^2 - a^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{udu}{\sqrt{u^2 - a^2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int z^{-1/2} dz &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} z^{1/2} + C_1 \\ &= \sqrt{\frac{u^2 - a^2}{2}} + C_1\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{-3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right| + C$$

Örnek 27.108.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = a \cos^2 u + b \sin^2 u$$

$$dx = (-2a \cos u \cdot \sin u + 2b \sin u \cos u) du$$

$$2 \sin u \cos u (b - a) du$$

$$= (b - a) \sin 2u du (x - a)$$

$$= a(\cos^2 u - 1) + b \sin^2 u = (b - a) \sin^2 u$$

$$(b - x) = b((1 - \sin^2 u) - a \cos^2 u) = (b - a) \cos^2 u$$

$$\sqrt{(x - a)(b - x)} = (b - a) \sin u \cos u$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{(x - a)(b - x)}} dx \\ &= \int \frac{(b - a) \sin 2u}{(b - a) \sin u \cos u} du \\ &= 2 \int du \\ &= 2u + C \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\frac{x - a}{b - x} = \tan^2 u \Rightarrow u = \arctan \sqrt{\frac{x - a}{b - x}}$$

değeri kullanılarak,

$$I = 2 \arctan \sqrt{\frac{x - a}{b - x}} + C$$

bulunur.

Örnek 27.109.

$$I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = 2 \tan t, dx = 2(1 + \tan^2 t)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{(\pi/2)} \frac{1}{\sqrt{4(1 + \tan^2 t)}} (1 + \tan^2 t) 2 dt \\ &= \int \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} \frac{2}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t (\sec t + \tan t)}{(\sec t + \tan t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t + \sec^2 t}{(\sec t + \tan t)} dt \\ &= \int \frac{du}{u} \quad (u = \sec t + \tan t) \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln |\sec t + \tan t| + C \\ &= \ln(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

Örnek 27.110.

$$I = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 3}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \sqrt{3} \tan t, dx = \sqrt{3} \sec^2 t dt$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 3}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{3} \sec^2 t}{3 \tan^2 t \sqrt{3} \sec t} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ &= \frac{1}{3} \int (\sin^2 t) d(\sin t) \\ &= -\frac{1}{3} \frac{1}{\sin t} + C \end{aligned}$$

Örnek 27.111.

$$I = \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 4}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \frac{2}{\cos t}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 4}} dx \\ &= \int \frac{\frac{2 \sin t}{\cos^2 t}}{\frac{2}{\cos t} \cdot \frac{2 \sin t}{\cos t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int dt \\ &= \frac{1}{3} t + C \\ &= \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.112.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{\pi + 2x}} dx \\ &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}} \\ &= \int \frac{udu}{u} \quad (u^2 = \pi + 2x, 2udu = 2dx, dx = udu) \\ &= u + C \\ &= \sqrt{\pi + 2x} + C \end{aligned}$$

Örnek 27.113.

$$\int (1-2x)^9 dx = -\frac{1}{2} \int (1-2x)^9 (-2dx) = -\frac{1}{20} (1-2x)^{10} + C$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx \\ &= \frac{2}{9} \int \frac{(u^2+1)}{u^2} du \quad (u^2 = 3x-1) \\ &= \frac{2}{3} \int u du + \frac{2}{9} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{3} (3x-1) + \ln \sqrt{3x-1} + C \end{aligned}$$

Örnek 27.114.

$$I = \int (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^2, u^3 = x-2, 3u^2 du = dx, (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{-\frac{10}{3}}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} dx \\ &= \int \frac{3u^2}{u^{10}} du \\ &= -\frac{3}{7} u^{-7} \\ &= -\frac{3}{7} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C \end{aligned}$$

Örnek 27.115.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u^2 = x$ konumuyla,,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \int \arcsin u + C \\ &= 2 \arcsin \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} + C \quad (27.85)$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C \quad (27.86)$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{-3x}-1} dx = \frac{1}{3} \ln |e^{3x}-1| + C \quad (27.87)$$

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}(1+e^{-\sqrt{x}})} dx = 2 \int \frac{du}{1+e^{-u}} = 2 \int \frac{e^u du}{1+e^u} = \ln(e^u + 1) + C \quad (27.88)$$

$$\int \frac{2^x}{4^x+1} dx = \int \frac{1}{\ln 2} \int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} du = \frac{\sinh^{-1}(2^x)}{\ln 2} = \frac{\ln(2^x + \sqrt{4^x+1})}{\ln 2} + C$$

$$\int \frac{\sinh \sqrt{x} \cdot \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \sinh^2 \sqrt{x} + C \quad (27.89)$$

27.19 İndirgenme Yöntemleri

İntegral eylemindeki indirgeme formülleri yinelge (recurrence) formüllerinin özel halidir. Yinelge, bir eylemin art arda tekrarlanarak en yalın (çözülebilir) biçimine dönüştürülmesidir. Bunu integral için bir örnekle açıklayabiliriz. Örneğin,

Örnek 27.116.

$$\int \cos^n x dx \quad (27.90)$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. O durumda kuvveti düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\cos x)^n dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1} \cdot \cos x dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1} \cdot d(\sin x) \end{aligned}$$

Kısmi integrasyon işlemleriyle,

$$\begin{aligned} \int \cos^n x dx &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - \int \sin x \cdot d((\cos x)^{n-1}) \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int \sin x \cdot (\cos x)^{n-2} \cdot \sin x dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \cdot (\sin x)^2 dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \cdot (1 - (\cos x)^2) dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \cdot dx - (n-1) \int (\cos x)^n dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

çıkar. Buradan I_n çözümlerse

$$\begin{aligned} I_n + (n-1)I_n &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x + (n-1)I_{n-2} \\ nI_n &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x + (n-1)I_{n-2} \\ I_n &= \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\int (\cos x)^n dx = \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} \int (\cos x)^{n-2} dx \quad (27.91)$$

indirgeme formülü bulunur. Benzer şekilde,

$$\int (\sin x)^n dx = -\frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int (\sin x)^{n-2} dx \quad (27.92)$$

Örnek 27.117.

$$\int \cos^5 x \, dx$$

integralini bulmak isteyelim. $n = 5$ olduğundan

$$n = 5 \Rightarrow I_5 = \int (\cos x)^5 \, dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3$$

$$n = 3 \Rightarrow I_3 = \frac{1}{3} (\cos x)^2 \cdot \sin x + \frac{2}{3} I_1$$

$$n = 1 \Rightarrow I_1 = \int \cos x \, dx = \sin x + C_1$$

Şimdi yürünülen yola geri dönülürse,

$$I_1 = \int \cos x \, dx = \sin x + C_1$$

$$I_3 = \frac{1}{3} (\cos x)^2 \cdot \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C_2 \quad (C_2 = \frac{2}{3} C_1)$$

$$I_5 = \frac{1}{5} (\cos x)^4 \cdot \sin x + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{3} (\cos x)^2 \cdot \sin x + \frac{2}{3} \sin x \right) + C$$

Örnek 27.118.

$$I_n = \int x^n e^{\alpha x} \, dx \quad (27.93)$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. x^n çarpanının kuvvetini düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} I_n &= \int x^n e^{\alpha x} \, dx \\ &= \frac{1}{n+1} \int e^{\alpha x} d(x^{n+1}), \quad \left(x^n \, dx = \frac{d(x^{n+1})}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} d(x^{n+1}) &= x^{n+1} e^{\alpha x} - \int x^{n+1} d(e^{\alpha x}) \\ &= x^{n+1} e^{\alpha x} - \alpha \int x^{n+1} e^{\alpha x} \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n+1)I_n &= x^{n+1} e^{\alpha x} - \alpha I_{n-1} \\ I_n &= \frac{1}{\alpha} (x^{n+1} e^{\alpha x} - n I_{n-1}) \end{aligned}$$

çıkar. Buradan

$$\int x^n e^{\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha} \left(x^{n+1} e^{\alpha x} - n \int x^{n-1} e^{\alpha x} \, dx \right) \quad (27.94)$$

indirgeme formülü bulunur.

27.20 Bazı İndirgeme Formülleri

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}} dx \\
 \Rightarrow I_n &= \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a(2n+1)} - \frac{2nb}{a(2n+1)} I_{n-1} \\
 I_n &= \int \frac{1}{x^n\sqrt{(ax+b)}} dx \\
 \Rightarrow I_n &= -\frac{\sqrt{(n-1)bx^{n-1}}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2b(n-1)} I_{n-1} \\
 I_{n,m} &= \int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n} \\
 \Rightarrow a^2 I_{n,m} &= a^2 I_{m,n} + I_{m-2,n} \\
 I_n &= \int x^n \sin(ax) dx \\
 \Rightarrow a^2 I_n &= -ax^n \cos(ax) + nx^{n-1} \sin(ax) - n(n-1) I_{n-2} \\
 J_n &= \int x^n \cos(ax) dx \\
 \Rightarrow a^2 J_n &= ax^n \sin(ax) + nx^{n-1} \cos(ax) - n(n-1) J_{n-2} \\
 I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\
 \Rightarrow I_n &= \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}
 \end{aligned}$$

Örnek 27.119. $a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda

$$I_n = \int x^a (\ln x)^n dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\ln x)^{n-1} dx \quad (27.95)$$

indirgeme formülünü ispatlayınız.

$$u = (\ln x)^n, \quad du = n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx, \quad dv = x^a dx, \quad v = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$$

konumıyla,

$$I_n = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^{a+1} (\ln x)^{n-1} dx \quad \square$$

Örnek 27.120. $a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda

$$I_n = \int x^{-1} (\ln x)^n dx = \int (\ln x)^n d(\ln x) = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C \quad (27.96)$$

dir.

$$I_n = \int \sin^n(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C \quad (27.97)$$

dir.

$$I_n = \int \cot(ax) dx = \ln |\sin(ax)| + C \quad (27.98)$$

dir.

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\
&= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos x} dx \\
&= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\
&= -\ln|\cos x| + C
\end{aligned}$$

dir.

$$I = \int \sec(x) dx = \ln|\sec(x) + \tan x| + C$$

dir.

$$I = \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \int \cos(ax) d(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

dir.

27.21 Bağlantılı Oranlar

1. Bir parçacık $2 = x + 2y$ doğrusu boyunca pozitif yönde gidiyor.

- (a) x koordinatının değişimi saniyede 4 birim ise y koordinatının değişimi nedir?
(b) y koordinatının değişimi saniyede -2 birim ise x koordinatının değişimi nedir?

Çözüm:

(a):

$$x + 2y = 2 \Rightarrow x' + 2y' = 0 \Rightarrow 4 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -2 \text{ br/sn}$$

olur. (b):

$$x + 2y = 2 \Rightarrow x' + 2(-2) = 0 \Rightarrow x' - 4 = 0 \Rightarrow x' = 4 \text{ br/sn}$$

olur.

2. Bir parçacık $x^2 + y^2 = 25$ eğrisi boyunca hareket ediyor. $(3, 4)$ noktasından geçerken y koordinatı saniyede 2 birim azalıyor. x koordinatının değişimi nedir?

Çözüm: $x = 3$ iken $y = 4$ dür.

$$2xx' + 2yy' = 0 \Rightarrow 3x' + 4(-2) = 0 \Rightarrow x' = \frac{8}{3}$$

olur. Demek ki x koordinatının değişimi $\frac{8}{3}$ br/sn dir.

3. Bir kamera bir eşkenar üçgenin oranlarını koruyarak küçültüyor. Belirli bir anda bir kenarın küçülmesi k cm/sn dir. Üçgenin alanının değişim oranı nedir?

Çözüm:

Alan formülünü yazalım. Eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu x ise yüksekliği $h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$ olacaktır. Öyleyse alan

$$A = \frac{1}{2}hx = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$A' = \frac{\sqrt{3}}{4}2xx' = \frac{\sqrt{3}}{2}xx' \text{ cm}^2/\text{dk}$$

olur.

4. Özel Görelilik kuramına dingin haldeyken kütlesi m olan bir cismin hızı v ise, ışık hızı c olmak üzere, cismin uzaydaki hızı

$$m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

dir. Cismin hızı ışık hızının yarısına eşit olduğunda, hızının değişimi saniyede $0.01c$ ise kütesinin değişimi nedir? [Görelilik kuramına göre cismin kütlesi hızına bağlı olarak değişir.]

Çözüm: Cismin hareket halindeki kütesine M diyelim.

$$M = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$M' = m \frac{vv'}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

olur.

5. Kenar uzunlukları x ve y olan dikdörtgenin kenarları, sırasıyla, u ve v oranında değişiyor. Dikdörtgenin alanının değişim oranını bulunuz.

Çözüm:

Dikdörtgenin alanı $A = xy$ dir. t anındaki değişim

$$\frac{dA}{dt} = x'y + xy' = uy + vx$$

olur.

6. İki bisiklet yarışçısından birisi (G) güneyden kuzeye doğru bitim noktasına (finish F), ötekisi (D) doğudan batıya doğru aynı bitim noktasına (F) doğru yol alıyorlar. G yarışçısının hızı 13 km/saat'dir. İki yarışçının bitim noktasına uzaklıkları eşit olduğu anda, aralarındaki uzaklık 16 km.dir. Aralarındaki uzaklık 17 km/saat hızla azalıyor. Yarışı hangisi kazanacaktır?

Çözüm: G yarışçısının bitim noktasına uzaklığı x , D yarışçısının y olsun. Aralarındaki uzaklık bir dik üçgenin hipotenüsüdür ve $d^2 = x^2 + y^2$ dir. Uzaklığın türevini alırsak, $dd' = xx' + yy'$ dür. $x = y$ olduğunda $d = 16$ veriliyor. O anda uzaklık formülünden $x = y = \frac{16}{\sqrt{2}}$ ve türev formülünden $y' = 13 - 17\sqrt{2} \approx -11 \text{ km/saat}$ bulunur. $y' < x'$ olur. O halde G yarışçısı daha hızlıdır ve yarışı kazanacaktır.

28 Belirsiz İntegral

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihsiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

28.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri

Temel Formüller: Aşağıdaki formüllerde $u = u(x)$ fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin dıve sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

- $\int u^n du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C,$
- $\int u dv = uv - \int v du$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
- $\int \frac{1}{au+b} du = \frac{1}{a} \ln|au+b| + C$

28.1 Değişken Değişirme

Belirsiz integral verildiği biçimde bilinen integral formüllerinden hiç birisine benzemiyorsa, bazen uygun bir değişken değişimi ile bilinen formüllerden birisine dönüştürülebilir. Bu eylemin genel yöntemi şöyledir: $x = g(t)$ konumu yapılırsa, $dx = g'(t)dt$ olacağı düşünülürse,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad (28.1)$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı bilinen integral formüllerinden birisine benziyorsa, eşitliğin sağ yanı hesaplanabilir. Sonra asıl x değişkenine dönmek için $t = g^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu kullanmak gerekir. Dikkat edilirse, bu sonuç zincir theoremına benziyor.

(28.1) formülü ile belirli integral değerleri de bulunabilir:

Teorem 28.1. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, $g(t)$ fonksiyonu $\alpha \leq g(t) \leq \beta$ için sürekli ve $g'(t)$ türevi de sürekli ise $a = g(\alpha)$ ve $b = g(\beta)$ ise ya da buna denk olarak $\alpha = g^{-1}(a)$ ve $\beta = g^{-1}(b)$ ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(g(t))g'(t)dt \quad (28.2)$$

olur.

Belirli integral için var olan theoremlar, Teorem ?? ve Teorem ?? yardımıyla belirsiz integrallere kolayca uygulanabilir.

Aşağıdakiler değişken değişimini gösteren örneklerdir.

Örnek 28.2.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}, \quad (t = x^2 + 1, \quad du = 2x dx) \\ &= \frac{1}{2} \ln|u| + C \\ &= \ln \sqrt{x^2 + 1} + C \end{aligned}$$

Örnek 28.3.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(2 \ln x)}{x} dx &= \frac{1}{2} \int \sin t dt, \quad (t = 2 \ln x, \quad dt = \frac{2}{x} dx, \quad dx = \frac{x}{2} dt) \\ &= -\frac{1}{2} \cos t + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2 \ln x) + C \end{aligned}$$

Örnek 28.4.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x + 1} e^x dx &= \int t^{1/2} dt, \quad (t = e^x + 1, \quad dt = e^x dx, \quad dx = e^{-x} dt) \\ &= \frac{2}{3} t^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (e^x + 1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Örnek 28.5.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx &= \int \frac{dx}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}} dx \\ &= \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}} dx \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad [t = e^{-x}, \quad dt = -e^{-x} dx] \\ &= -\sin^{-1} t + C \\ &= -\sin^{-1}(e^{-x}) + C \end{aligned}$$

Örnek 28.6.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{5+4x+x^2} dx &= \int \frac{dx}{1+(x+2)^2} dx \\
&= \int \frac{du}{1+u^2} du, \quad [u = (x+2), \quad du = dx] \\
&= \tan^{-1} u + C \\
&= \tan^{-1}(x+2) + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.7.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_1^2 \sin t dt, \quad \left[t = \sqrt{x+1}, \quad dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \right] \\
&= 2 \int_1^2 \sin t dt, \quad [x=0 \Rightarrow t=1, \quad x=3 \Rightarrow t=2] \\
&= -2 \cos u \Big|_1^2 \\
&= 2(\cos 1 - \cos 2)
\end{aligned}$$

28.2 *Trigonometrik İntegraller***Örnek 28.8.**

$$\begin{aligned}
\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx, \quad (t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx) \\
&= - \int \frac{dt}{t} + C \\
&= -\ln|t| + C \\
&= -\ln|\cos x| + C \\
&= \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + C \\
&= \ln|\sec x| + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.9.

$$\begin{aligned}
\int \cot x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad (t = \sin x, \quad dt = \cos x dx) \\
&= \int \frac{dt}{t} + C \\
&= \ln|t| + C \\
&= \ln|\sin x| + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.10.

$t = (\sec x + \tan x)$, $dt = \sec x \tan x + \sec^2 x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx, \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx + C \\ &= \int \frac{dt}{t} &= \ln |t| + C \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.11.

$t = (\csc x + \cot x)$, $dt = -(\csc x \cot x + \csc^2 x) dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx \\ &= \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx + C \\ &= \int -\frac{dt}{t} \\ &= -\ln |t| + C \\ &= -\ln |\csc x + \cot x| + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.12.

n tek ise $n = 2k + 1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int (t^n (1 - t^2)^k) dt + C\end{aligned}$$

çıkar. $(1 - t^2)^k$ binoma göre açılabilir ve sonuç t ye göre bir polinom olur. Polinom terim terime integrallenebilir. Sonra istenirse $\sin x$ 'e dönüşüm yapılabilir. Bunu bir örnekle açıklamak daha kolay olacaktır.

Örnek 28.13.

n tek ise $n = 2k + 1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x (\cos^2 x) \cos x dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx, \quad (t = \sin x, dt = \cos x dx) \\ &= \int (t^2 - t^4) dt + C \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C\end{aligned}$$

Örnek 28.14.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x dx &= \int \sin^2 x (\cos^8 x) \sin x dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^8 x \sin x dx, \quad (t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx) \\
&= \int (1 - t^2) t^8 dt + C \\
&= \int (t^8 - t^{10}) dt \\
&= \frac{1}{9} t^9 - \frac{1}{11} t^{11} + C \\
&= \frac{1}{9} \cos^9 x - \frac{1}{11} \cos^{11} x + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.15.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx, \quad [\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C \\
&= \frac{1}{2} (x - \sin x \cdot \cos x) + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.16.

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx, \\
&= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx, \quad [\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)] \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sin 4x + C \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C
\end{aligned}$$

28.3 Ters Trigonometrik Konumlar

Çok kullanışlı bazı ters trigonometrik konumlar (değişken değiştirimi),

$$x = a \sin \theta, \quad x = a \tan \theta, \quad x = a \sec \theta$$

fonksiyonları ile yapılır. Bunların karşıt fonksiyonları

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right), \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right), \quad \theta = \sec^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

dır.

Teorem 28.17.

İntegrali alınacak ifade $\sqrt{a^2 - x^2}$, ($a > 0$) terimi içeriyorsa, $x = a \sin \theta$ ya da ona denk olarak $\theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$ konumu yapılır.

Örnek 28.18.

a yarıçaplı bir disk içinde $b < a$ olmak üzere $[b, a]$ aralığına düşen daire kesmesinin A alanını bulunuz.

Çözüm: dairede simetriyi kullanırsak, sözkonusu alan I.bölgedeki alanın iki katı olacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A &= \int_b^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_b^a (a^2 \cos \theta) d\theta, \quad [x = a \sin \theta, \quad dx = a \cos \theta d\theta] \\ &= a^2 (\theta + \sin \theta \cdot \cos \theta) \Big|_{x=b}^{x=a} \\ &= a^2 \left(\sin^{-1} \left(\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \right) \right) \Big|_{x=b}^{x=a} \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 - a^2 \sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) - b\sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.19.

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx = \int \frac{3 \sec^2 \theta}{3 \sec \theta} d\theta, \quad [x = 3 \tan \theta, \quad dx = 3 \sec^2 \theta d\theta] \\ &= \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C \\ &= \ln (\sqrt{9+x^2} + x) + C_1, \quad [C_1 = C - \ln 2] \end{aligned}$$

çıkar.

28.4 Çözümlü Problemler

1.

$$\int dx = x + C$$

2.

$$\int k dx = kx + C$$

3.

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

4.

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

5.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

6.

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

7.

$$\int x^2(1-x^3)^5 dx = -\frac{1}{18}x^3(x^3-2)(x^6-3x^3+3)(x^6-x^3+1) + C$$

8.

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \sinh^{-1}(x) - \sqrt{x^2+1} + C$$

9.

$$\int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}(x^2 - \ln(x^2+1)) + C$$

10.

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e^x}{x+1} + C$$

11.

$$\int xe^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C$$

12.

$$\int x(x-1)^6 dx = \frac{1}{8}x^8 - \frac{6}{7}x^7 + \frac{5}{2}x^6 - 4x^5 + \frac{15}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

13.

$$\int \frac{1}{5x+3} dx = \frac{1}{5} \ln(5x+3) + C$$

14.

$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3} dx$$

integralini bulunuz.

Çözüm: $t = \sqrt{x}$ değişken değiştirimi yapılırsa

$$\begin{aligned} t = \sqrt{x} &= \\ dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt \\ x &= t^2 \Rightarrow x+1 = t^2+1 \\ x &= 4 \mapsto t=2 \\ x &= 9 \mapsto t=3 \end{aligned}$$

(28.3)

değişken değiştirimi yapılınc,

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3} dx &= \int_2^3 \frac{t^2+1}{t^2+2t-3} \\ &= \int_2^3 \frac{2t^3+2t}{t^2+2t-3} dt \\ &= \int_2^3 \left(2t-4 + \frac{16t-12}{(t-1)(t+3)} \right) dt \\ &= \int_2^3 \left(2t-4 + \frac{1}{t-1} + \frac{15}{t+3} \right) dt \\ &= t^2 - 4t + \ln|t-1| + 15\ln|t+3| \Big|_2^3 \\ &= [9 - 12 + \ln 2 + 15\ln 6] - [4 - 8 + 0 + 15\ln 5] \\ &= \ln 2 + 15\ln 6 + 15\ln 3 - 15\ln 5 + 1 \\ &= \ln 2 + 15\ln 6 - 15\ln 5 + 1 \end{aligned}$$

İstenirse, 5. eşitlikten sonra t değişkeninden tekrar x değişkenine dönüşüm yapılabilir

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3} dx &= x - 4\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}+3| \Big|_4^9 \\ &= \ln 2 + 15\ln 6 - 15\ln 5 + 1 \end{aligned}$$

bulunur.

15.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu problemi çözmek için önce (28.4) eşitsizliğinin varlığını göreceğiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{x^2 + n^2} dx = 0 \quad (28.4)$$

Sonra Teorem ??-10.'yu kullanacağız:

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| dx \quad (28.5)$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2} dx \quad (28.6)$$

$$= \frac{2\pi}{n^2} \quad (28.7)$$

Bu eşitsizliklerden limite geçerse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n^2} = 0$$

çıkar.

16.

$$\int (x+3) \sin(x^2 + 3x - 5) dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \int (x+3) \sin(x^2 + 3x - 5) dx &= \frac{1}{2} \int \sin(x^2 + 3x - 5) d(x^2 + 3x - 5) \\ &= -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 3x - 5) + C \end{aligned}$$

17.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x^2-x)}} dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} dx, \quad t = (x-\frac{1}{2}) \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-t^2}} dt \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{t}{5/2}\right) + e \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right) + e
\end{aligned}$$

18.

$$\int_0^1 x \ln(x+3) dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$t = \ln(x+3)$ konumu yapılırsa $dv = x dx$, $dt = \frac{dx}{x+3}$, $v = \frac{x^2}{2}$ olur. Bunlar kısmi integral formülünde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int x \ln(x+3) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(x+3) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+3} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln(x+3) - \frac{1}{2} \int \left(x-3 + \frac{9}{x+3}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln(x+3) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 9 \ln(x+3)\right) + C
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 x \ln(x+3) dx = \frac{5}{4} - \ln 4 + \frac{9}{2} \ln 3$$

bulunur.

19.

$$\int e^{x/2} \sin(ax) dx = \frac{1}{(a^2 + \frac{1}{4})} e^{x/2} \left(\frac{\sin(ax)}{2} - a \cos(ax)\right) + C$$

olduğunu sağlayınız.

20.

$$\int \frac{1}{(3 \cos x + 5)} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{2}\right) + C$$

olduğunu sağlayınız.

21.

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

22.

$$\int x \sin x \, dx = \sin x x \cos x + C$$

23.

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x} + C$$

24.

$$\int \csc(3x) \sec(3x) \, dx = \frac{1}{3} (\ln(\sin(3x)) - \ln(\cos(3x))) + C$$

25.

$$\int \frac{1}{1+x^3} \, dx = \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

26.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} \, dx = -2\sqrt{4-x} + C$$

27.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} \, dx = -\frac{2x}{\sqrt{x^3}} + C$$

28.

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C$$

29.

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx = \tan^{-1}(e^x) + C$$

Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \frac{1}{(au+b)^2} \, du = -\frac{1}{u+a} + C, \quad (au+b \neq 0)$
2. $\int (u+b)^n \, du = \frac{1}{n+1} (u+a)^{n+1} + C,$
3. $\int u(u+a)^n \, du = \frac{1}{(n+1)(n+2)} (u+a)^{n+1} ((n+1)u-a) + C,$
4. $\int \frac{1}{1+u^2} \, du = \tan^{-1} u + C$
5. $\int \frac{1}{a^2+u^2} \, du = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C = -\frac{1}{a} \cot^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
6. $\int \frac{1}{u^2-a^2} \, du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$
7. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C$
8. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

Köklü İfadelerin İntegralleri:

1. $\int \sqrt{x-a} \, dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} + C$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} \, dx = 2\sqrt{x \pm a} + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} \, dx = -2\sqrt{a-x} + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \, du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C = -\cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}} \, du = \ln \left| u + \sqrt{u^2-a^2} \right| + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \, du = \ln \left| u + \sqrt{u^2+a^2} \right| + C$

$$7. \int \frac{1}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} du = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}} \right| + C$$

$$8. \int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$9. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$10. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri:

$$1. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$2. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$3. \int \tan u du = \ln |\sec u| + C = \ln |\cos u| + C$$

$$4. \int \cot u du = \ln |\sin u| + C$$

$$5. \int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C = \ln \left| \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$$

$$6. \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$7. \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$8. \int \csc u \tan u du = \sec u + C$$

$$9. \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

Hiperbolik Fonksiyonların İntegralleri:

$$1. \int \sinh u du = \cosh u + C$$

$$2. \int \cosh u du = \sinh u + C$$

$$3. \int \tanh u du = \ln |\cosh u| + C$$

$$4. \int \coth u du = \ln |\sinh u| + C$$

$$5. \int \operatorname{sech}(u) du = \tanh^{-1}(\sinh u) + C$$

$$6. \int \operatorname{csch}(u) du = -\operatorname{coth}^{-1}(\cosh u) + C$$

$$7. \int \operatorname{sech}^2(u) du = \tanh u + C$$

$$8. \int \operatorname{csch}^2(u) du = -\operatorname{coth} u + C$$

$$9. \int \operatorname{sech}(u) \tanh u du = -\operatorname{sech}(u) + C$$

$$10. \int \operatorname{csch}(u) \coth u du = -\operatorname{csch}(u) + C$$

Üstel Fonksiyonların İntegralleri:

$$1. \int e^{ku} du = \frac{1}{k} e^{ku} + C$$

$$2. \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$3. \int u a^{ku} du = \frac{1}{k \ln a} a^{ku} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$4. \int u^2 a^{ku} du = a^{ku} \left(\frac{u^2}{k} - \frac{2u}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right) + C$$

$$5. \int \frac{e^{kx}}{x} dx = \ln u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-kx)^n}{n \cdot n!}$$

$$6. \int e^{au} \sin bu \, du = \frac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2} a^2 + b^2 + C$$

$$7. \int e^{au} \cos bu \, du = \frac{e^{au}(a \cos bu + b \sin bu)}{a^2 + b^2} + C$$

Logaritmik Fonksiyonların İntegralleri:

$$1. \int \ln(kx) \, dx = x \ln(kx) - x + C$$

$$2. \int \ln(ax + b) \, dx = x \ln(ax + b) - x + \frac{b}{a} \ln(ax + b) + C$$

$$3. \int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

$$4. \int (\ln(kx))^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln(kx))^{n-1} \, dx + C$$

$$5. \int \frac{1}{\ln x} \, dx = \ln |\ln x| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n \cdot n!} + C$$

$$6. \int x^m \cdot \ln x \, dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \quad (m \neq -1)$$

$$7. \int \frac{1}{x(\ln x)^n} \, dx = \frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

$$8. \int \ln(x^2 + a^2) \, dx = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$9. \int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

$$10. \int \cos(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$$

28.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri

28.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse

$y = \ln u \implies y' = \frac{u'}{u}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{u'(x) dx}{u(x)} = \ln |u(x)| + C$$

yazabiliriz. Bazen uygun değişken değiştirimi ile integrali alınacak fonksiyon bu biçime sokulabilir.

Örnekler:

1. $y = \ln x \implies y' = \frac{1}{x}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

yazabiliriz.

2. İntegrali alınacak fonksiyon $\frac{1}{x-a}$ biçiminde ise, onun $\ln |x - a| + C$ fonksiyonunun türevi olduğunu biliyoruz.

$$\int \frac{1}{x-2} dx \tag{28.8}$$

integralini hesaplamak için $w = x - 2$, $dw = dx$ konumu yapılsa,

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{1}{w} dw = \ln |w| + C = \ln |x - 2| + C$$

bulunur.

3. Paydanın türevi paya eşitse, bir değişken değişimini ifadeyi $\frac{dw}{u}$ biçimine dönüştürür.

$$\int \frac{r^2 - 2r}{r^3 - 3r^2 + 1} dr$$

integralini hesaplamak için

$$w = r^3 - 3r^2 + 1, \quad dw = (3r^2 - 6r)dr = 3(r^2 - 2r)dr$$

konumu yapılsa,

$$\begin{aligned} \int \frac{r^2 - 2r}{r^3 - 3r^2 + 1} dr &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{w} dw \\ &= \frac{1}{3} \ln|w| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|r^3 - 3r^2 + 1| + C \end{aligned}$$

bulunur.

4. Çoğunlukla payda'nın türevi paya eşit olmaz. Bu durumlarda da değişken değişimini bazen işe yarayabilir.

$$\int \frac{s+2}{s+3} ds$$

integralini hesaplamak için $w = s - 3$, $dw = ds$ konumu yapılsa,

$$\begin{aligned} \int \frac{s+2}{s+3} ds &= \int \frac{w+5}{w} dw = \int \left(1 + \frac{5}{w}\right) dw \\ &= w + 5 \ln|w| + C \\ &= s - 3 + 5 \ln|s - 3| + C \end{aligned}$$

bulunur.

28.5.2 Basit Kesirlere ayırma

Teorem 28.20. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu için, payın derecesi paydadunkinden küçük ve paydanın baş katsayısı 1 olsun. Payda

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

gibi doğrusal çarpanlarına ayrılabilirse,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} \quad (28.9)$$

biçiminde yazılabilir.

Bu teoremin formal ispatını vermeye gerek kalmadan, integral hesabında gerekli olacağı için A_1, A_2, \dots, A_n katsayılarının hesaplanışını göstereceğiz. O eylem ispat yerine geçecektir. Bunun için yapılacak iş basittir. (28.9) ifadesinin sağ yanındaki terimlerin paydalarını eşitleyip ortak payda altında toplarız. Sağ tarafın payına

gelecek olan polinoma $S(x)$ dersek, (28.9) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} \quad (28.10)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan $P(x) \equiv S(x)$ olması gerektiği çıkar. Bu özdeşlikte eşit dereceli terimlerin katsayılarını eşitleyerek istenen A_1, A_2, \dots, A_n katsayıları hesaplanabilir.

Katsayıları kolay hesaplamaya yarayan başka pratik bir yöntem de şöyledir: (28.9) eşitliğinin iki yanını herhangi bir $(x - a_j)$ ile çarpıp $x \rightarrow a_j$ iken limiti hesaplayalım: Her $(1 \leq j \leq n)$ için,

$$A_j = \lim_{x \rightarrow a_j} (x - a_j) \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a_j)}{(a_j - a_1)(a_j - a_2) \dots (a_j - a_n)} \quad (28.11)$$

yazılabilir. Bu eşitlikte paydası $(x - a_j)$ olan terime karşılık gelen A_j katsayısı bulunmuş olur. Her $(1 \leq j \leq n)$ için bu işlem yapılırsa, A_1, A_2, \dots, A_n katsayıları hesaplanmış olur. Bu işleme dikkat edersek, yapılan iş,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} \quad (28.12)$$

eşitliğinin sağ yanında paydadaki $(x - a_j)$ çarpanını yok sayıp geride kalan ifadede x yerine a_j koymaktan ibarettir. Katsayıların hesaplanmasında bu oldukça kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

Örnekler: Bazen paydayı çarpanlarına ayırmak integral işlemini basitleştirir.

5.

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6} dx \quad (28.13)$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi basit kesirlerine ayıracağız.

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} = \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} \quad (28.14)$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad (28.15)$$

$$= \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} \quad (28.16)$$

$$\implies (A+B) = 1, \quad -3A-2B = 4 \quad (28.17)$$

$$\implies a = -6, \quad B = 7 \quad (28.18)$$

olur. Buradan,

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6} dx = -6 \int \frac{1}{x-2} dx + 7 \int \frac{1}{x-3} dx \quad (28.19)$$

$$= -6 \ln|x-2| + 7 \ln|x-3| + C \quad (28.20)$$

çıkar.

6.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)} dx &= \frac{A}{x-2} + \frac{A}{x+2} + \frac{A}{x-5} \\ &= \frac{104}{84(x-5)} + \frac{35}{x-2} + \frac{15}{x+2} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)} dx &= \int \frac{104}{84(x-5)} + \int \frac{35}{x-2} + \int \frac{15}{x+2} \\ &= \frac{1}{84}(104 \ln|x-5| - 35 \ln|x-2| + 15 \ln|x+2|) + C\end{aligned}$$

bulunur.

7. Payın derecesi paydaninkinden büyükse, önce bölme işlemi yapılır, sonra yukarıdaki yöntemle başvurulur:

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2} dx$$

integralini hesaplamak için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^3-4}{x^2-x-2} = (x+2) + \frac{9x+2}{x^2-x-2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2} dx &= \int (x+2) dx + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2} dx\end{aligned}$$

yazılabilir. Sağdaki integrali hesaplamak için,

$$\begin{aligned}\frac{9x+2}{x^2-x-2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \\ \Rightarrow A &= \frac{7}{3}, B = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2} dx &= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \frac{7}{3} \ln|x+1| + \frac{20}{3} \ln|x-2| + C_2 \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{7}{3} \ln|x+1| + \frac{20}{3} \ln|x-2| + C, \quad (C = C_1 + C_2)\end{aligned}$$

bulunur.

8.

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x} dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x} dx = \int \left(1 + \frac{x+2}{x^3-x}\right) dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x} dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yandaki integral içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^3-x} &= \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)} \\ \Rightarrow &\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ -A=2 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözümlürse $A = -2$, $B = 3/2$, $C = 1/2$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^3-x} dx &= x - 2 \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= x - 2 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

çıkar.

9. Paydanın bir yada iki dereceli bir çarpanı m kez tekrar ediyorsa, onu kesirlerine ayırırken söz konusu çarpan için, dereceleri 1 den m ye kadar değişen terimler eklenir.

Örnek 28.21.

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2}$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2} \\ \Rightarrow \begin{cases} A+B+C &= 0 \\ -2A-B+C &= 0 \\ A &= 1 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözümlürse $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2} &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

çıkar.

28.5.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa

Payda'da $ax^2 + bx + c$ gibi ikinci dereceden bir çarpan var ve $b^2 - 4ac < 0$ ise o çarpana ait gerçel kök yoktur. Basit kesirlere ayırırken ona ait terimi $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ biçiminde yazarız. Tabii, aynı düşüncemiz

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx, \int \frac{x}{x^2+a^2} dx, \int \frac{1}{x^2-a^2} dx, \int \frac{x}{x^2-a^2} dx$$

tipi integrallerin hepsine uygulayabiliriz. Sonuçlar daima,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (28.21)$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C \quad (28.22)$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{|x-a|}{|x+a|} + C \quad (28.23)$$

$$\int \frac{x}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-a^2| + C \quad (28.24)$$

formüllerine indirgenebilir.

Örnekler

1.

$$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x} dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^3 + x} dx = \int \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} &= \frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \\ &= \frac{A(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx}{x(x-1)(x+1)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} A + B &= 1 \\ C &= 3 \\ A &= 2 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözüldürse $A = 2$, $B = -1$, $C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2}{x^3 + x} dx &= 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} + 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= 2 \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 3 \tan^{-1} x + C \end{aligned}$$

çıkar.

2.

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \left(\frac{1}{(x-a)(x+a)} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \\ &= \frac{Ax + Aa + Bx - Ba}{(x^2 - a^2)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} A + B &= 0 \\ Aa - Ba &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözüldürse $A = 1/(2a)$, $B = -1/(2a)$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x-a} dx - \frac{1}{2a} \int \frac{1}{x+a} dx \\ &= \frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \end{aligned}$$

çıkar.

3. Bazen uygun bir değişken değiştirimi ile payda'nın türevi paya eşitlenebilir.

$$\int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} dx = \int \left(\frac{x^2 + 2}{x((2x^2 + 1)(2x^2 + 1)^2)} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2}{(x - a)(x + a)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{2x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(2x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{A(4x^2 + 4x + 1) + B(2x^4 + x^2) + C(2x^3 + x) + Dx^2 + Ex}{4x^5 + 4x^3 + x} \\ \Rightarrow &\begin{cases} 4A + 2B &= 0 \\ 2C &= 0 \\ 4A + B + D &= 1 \\ A &= 2 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözüldürse $A = 2$, $B = -4$, $C = 0$ $D = -3$, $E = 0$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} dx &= 2 \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{xdx}{2x^2 + 1} - 3 \int \frac{xdx}{(2x^2 + 1)^2} \\ &= 2 \ln|x| - \int \frac{du}{u} - \frac{3}{4} \int \frac{du}{u^2}, \quad (u = 2x^2 + 1) \\ &= 2 \ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C \\ &= 2 \ln\left(\frac{x^2}{2x^2 + 1}\right) + \frac{3}{4} \frac{1}{2x^2 + 1} + C \end{aligned}$$

çıkar.

- 4.

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx = \int \left(\frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{A(x^2 - x + 1) + B(x^2 + x) + C(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \\ \Rightarrow &\begin{cases} A + B &= 0 \\ -A + B + C &= 0 \\ A + C &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözüldürse $A = 1/3$, $B = -1/3$, $C = 2/3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} du + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.22.

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\int \frac{3dx}{3x-4}$ | 2. $\int \frac{dx}{3-5x}$ |
| 3. $\int \frac{xdx}{\pi x-3}$ | 4. $\int \frac{x^2 dx}{x-3}$ |
| 5. $\int \frac{dx}{x^2-4}$ | 6. $\int \frac{dx}{3-x^2}$ |
| 7. $\int \frac{x^2}{x^2+2x-2}$ | 8. $\int \frac{xdx}{3-x^2}$ |
| 9. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ | 10. $\int \frac{1}{a^2-b^2x^2} dx$ |

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\int \frac{x-3}{x^2+x} dx$ | 2. $\int \frac{1}{9x+x^3} dx$ |
| 3. $\int \frac{1}{9x^2-6x+2} dx$ | 4. $\int \frac{x}{2+6x+9x^2} dx$ |
| 5. $\int \frac{1+x^2}{9x^2-6x} dx$ | 6. $\int \frac{1+x^3}{x^2+7x+12} dx$ |
| 7. $\int \frac{x^3}{x^3-a^3} dx$ | 8. $\int \frac{dx}{2x+2x^2+x^3}$ |
| 9. $\int \frac{1}{x^4-3x^3} dx$ | 10. $\int \frac{x}{1-x+x^2} dx$ |

Karma problemler

1. Aşağıdaki integral formüllerini doğruluğunu sağlayınız.

Örnek 28.23.

$$\int \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Örnek 28.24.

$$\int \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} C$$

Örnek 28.25.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Örnek 28.26.

$$\int \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2 \tan x \sec^2 x + C$$

Örnek 28.27.

$$\int x(a^x) dx = \frac{a^x(\ln a - 1)}{\ln^2 a} + C$$

Örnek 28.28.

$$\int x(\sinh x) dx = x(\cosh x) + \sinh x + C$$

Örnek 28.29.

$$\int \sin \sqrt{x} dx = 2(\sin \sqrt{x} - 2 \cos \sqrt{x}) + C$$

Örnek 28.30.

$$\int \sin^{-1}(\sqrt{x}) dx = \frac{1}{2}(\sqrt{-(x-1)x} + \sin^{-1}(\sqrt{x})) + C$$

Örnek 28.31.

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x}) dx = (x+1) \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$$

Örnek 28.32.

$$\int x \ln x = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) + C$$

2. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

Örnek 28.33.

$$\int \frac{x^2 - 5x - 9}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \left\{ \frac{1}{6} (-13 \ln(x-1) + 9 \ln(x+1) + 10 \ln(x+2)) \right\} + C$$

Örnek 28.34.

$$\int \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ \Rightarrow \begin{cases} A &= 4 \\ A+B &= 3 \\ B &= 3 - A = 3 - 4 = -1 \\ C &= 3 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözümlürse $A = 4$, $B = -1$, $C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\ &= 4 \ln|x-1| - \ln|x+2| + 3 \int (x+2)^{-2} dx + C \\ &= \ln \frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\ &= \ln \frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.35.

$$\int \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\ &= \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ \Rightarrow \begin{cases} A &= 4 \\ A+B &= 3 \\ B &= 3 - A = 3 - 4 = -1 \\ C &= 3 \end{cases} \end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözümlürse $A = 4$, $B = -1$, $C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2 + 18x + 15}{(x-1)(x+2)^2} dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\ &= 4 \ln|x-1| - \ln|x+2| + 3 \int (x+2)^{-2} dx + C \\ &= \ln \frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\ &= \ln \frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.36.

$$\begin{aligned}\int (1-3x)^5 dx &\Rightarrow t = 1-3x, dt = 3dx \\ &= \int t^5 \left(\frac{-1}{3} dt\right) \\ &= \frac{-1}{3} \frac{1}{6} t^6 \\ &= \frac{-1}{18} (1-3x)^6 + C\end{aligned}$$

Örnek 28.37.

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x + 4)^3}{x} dx &\Rightarrow t = \ln x + 4, dt = \frac{1}{x} dx \\ &= \int t^3 dt \\ &= \frac{1}{4} t^4 \\ &= \frac{1}{4} (\ln x + 4)^4 + C\end{aligned}$$

Örnek 28.38.

$$\begin{aligned}\int a^x dx &\Rightarrow t = a^x \Rightarrow t = e^{x \ln a}, \\ &= \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} + C \\ &= \frac{1}{\ln a} a^x + C\end{aligned}$$

Örnek 28.39.

$$\begin{aligned}\int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &\Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt, \\ &= 2 \int a^t dt \\ &= \frac{2}{\ln a} a^t + C \\ &= \frac{2}{\ln a} a^{\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

Örnek 28.40.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{1+x^8} dx &\Rightarrow t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3 dx, \\
&= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{4} \tan^{-1}(x^4) + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.41.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx &\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \\
&= \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx \\
&= \ln|\sin x + \cos x| + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.42.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\cos^5 x} \sin x dx &\Rightarrow t = \cos x, dt = -\sin x dx \\
&= -\int \sqrt{t^5} dt \\
&= -\int t^{5/2} dt \\
&= -\frac{2}{7} t^{7/2} + C \\
&= -\frac{2}{7} (\cos^{7/2} x) + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.43.

$$\begin{aligned}
\int x^3 \sqrt{x-3} dx &\Rightarrow t^2 = x-3, 2t dt = dx, x = t^2 + 3 \\
&= \int (t^2 + 3)^3 \cdot t \cdot (2t dt), \quad [(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3] \\
&= 2 \int (t^8 + 9t^6 + 27t^4 + 27t^2) dt \\
&= \frac{2}{9} t^9 + \frac{18}{7} t^7 + \frac{54}{5} t^5 + \frac{54}{3} t^3 + C \\
&= \frac{2}{9} (x-3)^{9/2} + \frac{18}{7} (x-3)^{7/2} + \frac{54}{5} (x-3)^{5/2} + 18(x-3)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.44.

$ekok\{4, 5\} = 20 \Rightarrow t^{20} = x + 1, 20t^{19} dt = dx, x = t^{20} - 1$ konumuyla,

$$\begin{aligned} \int \frac{3 + \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}} dx &= \int \frac{3 + \sqrt[4]{t^{20}}}{\sqrt[5]{t^{20}}} (20t^{19} dt) \\ &= \int \frac{3 + t^5}{t^4} (20t^{19}) dt \\ &= 20 \int \left(t^{20} + \frac{3t^{19}}{t^4} \right) dt \\ &= \frac{20}{21} t^{21} + \frac{15}{4} t^{16} + C \\ &= \frac{20}{21} (x+1)^{\frac{21}{20}} + \frac{15}{4} (x+1)^{\frac{4}{5}} + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 28.45.

$u = x, dv = e^x dx, du = dx, v = e^x, \int u dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \\ &= e^x (x - 1) \end{aligned}$$

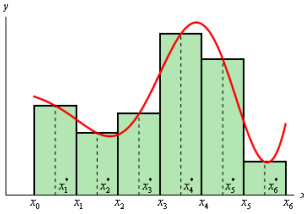
bulunur.

Örnek 28.46.

$u = x^2, dv = e^x dx, du = 2x dx, v = e^x, \int u dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2e^x (x - 1) + C \\ &= e^x (x^2 - 2x + 2) + C \end{aligned}$$

bulunur.



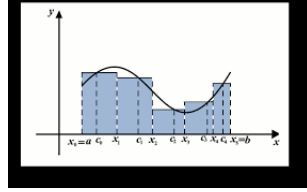
Şekil 28.1: Düzlemsel bölgenin alanı

28.6 Belirli İntegral

Düzlemde kare, dikdörtgen, üçgen, çember gibi iyi bilinen geometrik şekillerin alanlarını bulmak için uygun formüller kullanıyoruz. Ama, uygulamada alanını bilmek isteyeceğimiz düzlemsel alanlar, yukarıda sayılan şekillerden hiç birisine benzemeyebilir. Üstelik bunların sayısı bilinen geometrik şekillerden daha çoktur.

Bilimin her alanında olduğu gibi, matematik de teoremları genişletme ve mümkünse genelleştirme peşindedir. Belirli integral bu gerekmeden doğmuştur. İlk genelleşme, bilinen geometrik şekiller yerine, bilinen fonksiyonlarla sınırlanmış düzlemsel bölgelerin alanlarının hesaplanması işidir. Daha sonra çok boyutlu uzaylarda yüzey alanlarını bulmaya genişletilmiştir. Ayrıca, fizikte farklı amaçlarla kullanılmaya başlanmıştır.

Şimdi bir $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunu düşünelim. Ox - eksenine $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alanı hesaplamak isteyelim. Genişleme için daima iyi bildiğimiz kavramlara dayanırız. Dikdörtgenin alanını iyi bildiğimize göre, söz konusu düzlemsel alanı dikdörtgenlere ayırmaya çalışalım. Tabii, $y=f(x)$ fonksiyonu Ox -eksenine paralel bir doğru değilse, dikdörtgenlerin alanlarının toplamı ancak gerçek alanın yaklaşık bir değeri olur. Şimdi bunu geometrik olarak açıklayalım:



Önce, f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerinde pozitif değerler aldığını varsayalım. $[a, b]$ aralığını, eşit olması gerekmeyen alt aralıklara bölelim:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (28.25)$$

Her $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında bir c_i noktası seçelim. $f(c_i) = y_i$ diyelim. Ox - eksenine $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alan, yaklaşık olarak tabanı $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ve yüksekliği $y_i = f(c_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olan dikdörtgenlerin alanları toplamına eşittir. Bunu şöyle ifade edelim:

$$s_n = \sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i = y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \dots + y_n \Delta x_n \quad (28.26)$$

(?) ifadesine $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü (partition), (28.26) toplamına da bu parçalanışa ait Riemann toplamı denilir. Ayrıntıya girmeden, f nin belirli koşulları sağlaması durumunda, en büyük Δx_i uzunluğu sıfıra yaklaşırken (28.26) toplamının varlığını söyleyeceğiz:

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} s_n = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i \quad (28.27)$$

Tabii, $\lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0}$ olduğunda alt aralıkların sayısı sonsuz olur ve her bir alt aralığın uzunluğu sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla, (28.27) toplamı bir sonsuz serinin toplamına dönüşür.

28.7 Belirsiz İntegral Kuralları

Teorem 28.47. $f(x)$ ile $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, $k \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ise, aşağıdaki bağıntılar vardır:

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
2. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, (k sabit sayı)
3. $\int_a^b k f(x) dx = \int_a^c k f(x) dx + \int_c^b k f(x) dx$, ($c \in [a, b]$)

4. $\int_a^b k dx = k(b-a)$
5. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx,$
6. $\int_a^a f(x) dx = 0,$
7. $x \in [a, b]$ ve m, M sabit sayılar olmak üzere $m \leq f(x) \leq M$ ise

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

8. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad (a < b)$
9. $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
10. $x \in [a, b]$ için $g(x) \geq f(x)$ ise $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$

28.8 Calculus'un Birinci Temel Teoremleri

28.8.1 Calculus'un 1. Teoremi

Teorem 28.48. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise;

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx, \quad x \in [a, b]$$

fonsiyonu (a, b) aralığında süreklidir, türetilebilir ve

$$F'(x) = f(x) \quad x \in (a, b)$$

eşitliği sağlanır.

28.8.2 Calculus'un İkinci Temel Teoremi

Teorem 28.49. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise, yukarıdaki gösterimler altında,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (28.28)$$

dır.

Örnek 28.50.

$y = f(x)$, Ox , $x = a$, $x = b$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan,

$$\int_a^b f(x) dx \quad (28.29)$$

belirli integrine eşittir.

Örnek 28.51.

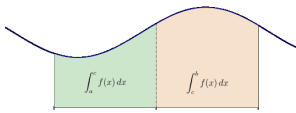
$y = 2x$ eğrisi, Ox doğrusu, $x = 1$ ve $x = 2$ doğrularının sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.

$$A = \int_1^2 2x dx \quad (28.30)$$

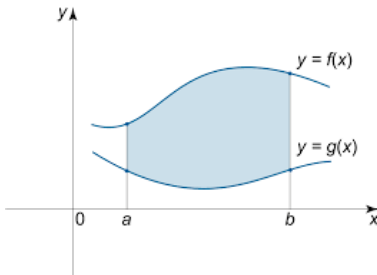
$$= x^2 \Big|_1^2 \quad (28.31)$$

$$= 2^2 - 1 = 3 \quad (28.32)$$

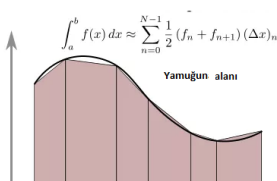
$$A = \frac{2+4}{2} \times 1 = 3 \quad (28.33)$$



Şekil 28.3: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması



Şekil 28.4: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması



Aynı sonucu, Şekil 28.5'deki yamuğun alan formülü ile de bulabiliriz. Anımsayacağınız gibi, yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yansının yüksekliği ile çarpımına eşittir.

Bazı aralıklarda $y = f(x)$ fonksiyonu negatif değerler alabilir. O zaman (28.26) Riemann toplamındaki negatif y_i ler için gikdörtgen alanları negatif olur. Oysa, düzlemsel alanın değeri daima pozitif olmalıdır. Negatif alan tanımlı değildir. O nedenle, negatif alanları pozitif yapmalıyız. Bunu yapmak için fonksiyonun negatif değerler aldığı aralıkları saptar ve onlar için bulduğumuz belirli integrali pozitif yaparız. Bu işlemi pratik bir formüle bağlamak da mümkündür:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \quad (28.34)$$

Örnek 28.52.

eğrisi altında ve $[\frac{1}{2}, 1]$ aralığı üzerinde kalan alanı bulunuz. Verilen bölgede $y = \cos x$ fonksiyonu pozitif değerler aldığı için, istenen alan,

$$A = \int_{0.5}^1 \cos x dx = \sin x \Big|_{0.5}^1 \quad (28.35)$$

$$= \sin(1) - \sin(0.5) \quad (28.36)$$

$$= 0.841 - 0.479 \quad (28.37)$$

$$= 0.362 \quad (28.38)$$

olur.

Örnek 28.53.

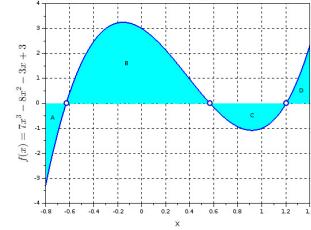
Yarıçapı $r = 3$ olan dairenin üst yarı düzlemdeki alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} 3\sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt, \quad [x = 3 \sin t, \quad dx = 3 \cos t dt] \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{9}{2} t + \frac{9}{2} \int \cos 2t dt \\ &= \frac{9}{2} t + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{2} \sin - 1(1) \\ &= \frac{9}{2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{9\pi}{4} \end{aligned}$$

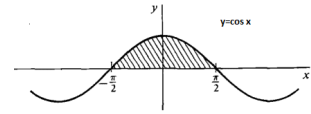
olur.

Uyarı 28.54. Aşağıdaki integral formülü kullanılırsa aynı sonuç elde edilir.

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$



Şekil 28.6: Negatif Alanlar



Şekil 28.7: $y = \cos x$ altındaki Alan

Örnek 28.55.

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = 9$$

Örnek 28.56.

$$\begin{aligned} \int_0^2 (4x^3 - 9x^2) dx &= 4 \int_0^2 x^3 dx - 9 \int_0^2 x^2 dx \\ &= (x^4 - 3x^3) \Big|_0^2 \\ &= 2^4 - 3(2)^3 \\ &= 16 - 24 = -8 \end{aligned}$$

Örnek 28.57.

$$\int_{-2}^0 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{8} (2x-1)^4 \Big|_{-2}^0 = -78$$

Örnek 28.58.

$y = x^2 - 4x + 5$ ile $y = 2x - 3$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\begin{aligned} \int_1^3 [(x^2 - 4x + 5)] dx &= \int_2^4 (-x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{64}{3} + 48 - 32 \right) \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

Örnek 28.59.

$$\int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} = \frac{8}{\ln 2}$$

Örnek 28.60.

$$\int_0^{2\sqrt{2}} (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{22\sqrt{2}}{3}$$

Örnek 28.61.

$y = 1 - x^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} (1 - x - x^2) dx = 5 \frac{5}{6} = 1.86339$$

Örnek 28.62.

$y = 16x - 10x^2 + x^3$ ile $y = -16x + 10x^2 - x^3$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_0^2 (32x - 20x^2 + x^3) dx + \int_2^8 (32x - 20x^2 + x^3) dx = \frac{1136}{3} = 378.667$$

Örnek 28.63.

$y = |x|$ ile $y = 6 - x^2$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{-3}^3 (6 - x^2 + |x|) dx = 27$$

Örnek 28.64.

$[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde $y = \sin x$ ile $y = \cos x$ eğrileri arasında ve [kalan alanı bulunuz.

$$\int_0^{\pi/4} (\cos - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (-\cos + \sin x) dx = 2\sqrt{2} \approx 2.82843$$

28.9 Belirsiz İntegral

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihisiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

28.9.1 Belirsiz İntegral Formülleri

Temel Formüller: Aşağıdaki formüllerde $u = u(x)$ fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin de sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

1. $\int u^n du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C,$
3. $\int u dv = uv - \int v du$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
4. $\int \frac{1}{au+b} du = \frac{1}{a} \ln|au + b| + C$

Index

arpanlara ayırma, 342

bölüntü, 387

basit kesirler, 349

belirli integral, 387

belirsiz integral, 303, 305, 332, 363, 391

calculus'un İkinci Teoremi, 388

calculus'un Birinci Teoremi, 388

değişken değiştirme, 333

definite integral, 387

ekok, 335

en küçük ortak kat, 335

ilkel, 303, 332

indefinite integral, 303, 305, 363, 391

indefiniteintegral, 332

indirgeme, 358

integral formülleri, 305, 363, 392

integral sabiti, 303

integral theoremları, 388

köklü integral, 352

kısmi integrasyon, 339

partial, 339

partition, 387

pimitive, 332

primitive, 303

rasynelleştirme, 351

rasyonel integral, 349

ters türev, 332

yerine koyma, 333