TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,
ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

6 Rasyonel Üslü İfadeler 4

7 Denklemler 5

30 İntegral Alma teknikleri 11

31 İntegral Alma teknikleri 12

25 İntegral Alma Yöntemleri 12

26 *Kutupsal Koordinatlar* 12

27 *Diziler* 13

28 *Seriler* 13

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,

ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

26 İntegral Alma Yöntemeleri

$f(x)$ fonkiyonunun belirsiz integrali türevleri $f(x)$ olan bütün fonkiyonlardır. Belirsiz integral

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C \qquad (C sabit) \tag{26.1}$$

simgesiyle gösterilir. Belirsiz denmesinin nedeni, $F(x)$ fonksiyonu türev kabul eden fonksiyonların sonsuz çoklukta oluşu ve hangisinden söz edildiğinin belli olmayışıdr. Sonsuz çoklukta olan belirsiz integraller birer sabit farkıyla birbirlerine eşittitler. Bu demektir ki, $F(x)$ ile $G(x)$ fonksiyonları $f(x)$ fonksiyonuun belirsiz integrali iseler

$$f(x) - G(x) = K \qquad (K sabit) \tag{26.2}$$

olur.

$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integraline *ilkel* (primitive), *ters türev* gibi adlar da verilir. Yalınlığı nedeniyle *ilkel* terimini tercih ediyouz. Ama öteki terimleri de, konuya açıklık getirmek gerektiğinde, eş anlamlı olarak kullanacağız.

(25.1) ifadesinde C sabiti sayısal her değeri alabilir. Dolayısıyla $F(x)$ fonksiyonunun sonsuzçoklukta belirsiz integrali vardır. Gerçel fonksiyonlarda çalışıyorsak, (25.1) belirsiz integralleri bütün düzlemi doldurur. Yani düzlemin her noktasından geçen bir ve yalnızca bir tane belirsiz integral vardır. Aynı fonksiyonun belirsiz integralleri kesişmezler.

27 Belirsiz İntegral

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihsiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

27.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri

Temel Formüller: Aşağıdki formüllerde u = u(x) fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin dve sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

1. $\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{u} \, du = ln|u| + C,$
3. $\int u dv = uv - \int v du$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
4. $\int \frac{1}{au+b} \, du = \frac{1}{a} ln|au + b| + C$

27.1 Değişken Değiştirme

Belirsiz integral verildiği biçemde bilinen integral formüllerinden hiç birisine benzemiyorsa, bazen uygun bir değişken değişimi ile bilinen formüllerden birisine dönüştürülebilir. Bu eylemin genel yöntemi şöyledir: $x = g(t)$ konumu yapılırsa, $dx = g'(t)dt$ olacağı düşünülürse,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \tag{27.1}$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı bilinen integral formüllerinden birisine benziyorsa, eşitliğin sağ yanı hesaplanabilir. Sonra asıl x değişkenine dönmek için $t = g^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu kullanmak gerekir. Dikkat edilirse, bu sonuç zincir theoremına benziyor.

(29.7) formülü ile belirli integral değerleri de bulunabilir:

Teorem 27.1. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $g(t)$ fonksiyonu $\alpha \leq g(t) \leq \beta$ için sürekli ve $g'(t)$ türevi de sürekli ise $a = g(\alpha)$ ve $b = g(\beta)$ ise ya da buna denk olarak $\alpha = g^{-1}(a)$ ve $\beta = g^{-1}(b)$ ise,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(g(t))g'(t)dt \tag{27.2}$$

olur.

Belirli integral için var olan theoremlar, Teorem **??** ve Teorem 29.7 yardımıyla belirsiz integrallere kolayca uygulanabilir.

Aşağıdakiler değişken değiştirimini gösteren örneklerdir.

Örnek 27.2.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}, \qquad (t = x^2+1,\ du = 2xdx)\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \ln\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

Örnek 27.3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(2\ln x)}{x}dx &= \frac{1}{2}\int \sin t dt, \qquad (t = 2\ln x,\ dt = \frac{2}{x}dx,\ dx = \frac{x}{2}dt)\\ &= -\frac{1}{2}\cos t + C\\ &= -\frac{1}{2}\cos(2\ln x) + C\end{aligned}$$

Örnek 27.4.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x+1}\, e^x dx &= \int t^{1/2}dt, \qquad (t = e^x+1,\ dt = e^x dx,\ dx = e^{-x}dt)\\ &= \frac{2}{3}t^{3/2} + C\\ &= \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Örnek 27.5.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx &= \int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx\\ &= \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}dx\\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad [t = e^-x,\quad dt = -e^{-x}dx]\\ &= -\sin^{-1} t + C\\ &= -\sin^{-1}(e^{-x}) + C\end{aligned}$$

Örnek 27.6.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5+4x+x^2}dx &= \int \frac{dx}{1+(x+2)^2}dx\\ &= \int \frac{du}{1+u^2}du, \qquad [u=(x+2), \quad du=dx]\\ &= \tan^{-1} u + C\\ &= \tan^{-1}(x+2)+C\end{aligned}$$

Örnek 27.7.

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx &= \int_1^2 \sin t dt, \qquad \left[t=\sqrt{x+1}, \quad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}\right]\\ &= 2\int_1^2 \sin t dt, \qquad [x=0 \Rightarrow t=1, \quad x=3 \Rightarrow t=2]\\ &= \ -2\cos u|_1^2\\ &= 2(cos 1-\cos 2)\end{aligned}$$

27.2 Trigonometrik İntegraller

Örnek 27.8.

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx, \qquad (t=\cos x, \ \ dt=-\sin x dx)\\ &= -\int \frac{dt}{t}+C\\ &= -\ln|t|+C\\ &= -\ln|\cos x|+C\\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|+C\\ &= \ln|sec x|+C\end{aligned}$$

Örnek 27.9.

$$\begin{aligned}\int \cot x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx, \qquad (t=\sin x, \ \ dt=\cos x dx)\\ &= \int \frac{dt}{t}+C\\ &= \ln|t|+C\\ &= \ln|\sin x|+C\end{aligned}$$

Örnek 27.10.

$t = (\sec x + \tan x)$, $dt = \sec x \tan x + \sec^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx, \\
&= \int \frac{sec^2 x + \sec x \tan x + sec^2 x}{sec x + \tan x} dx + C \\
&= \int \frac{dt}{t} \qquad\qquad\qquad\qquad = \ln|t| + C \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.11.

$t = (\csc x + \cot x)$, $dt = -(\csc x \cot x + \csc^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \csc x dx &= \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx \\
&= \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} + C \\
&= \int -\frac{dt}{t} \\
&= -\ln|t| + C \\
&= -\ln|\csc x + \cot x| + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.12.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x.\cos^n x dx &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\
&= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx \\
&= \int (t^n (1 - t^2)^k dt + C
\end{aligned}$$

çıkar. $(1 - t^2)^k$ binoma göre açılabilir ve sonuç t ye göre bir polinom olur. Polinom terim terime integrallenebilir. Sonra istenirse $\sin x$'e dönüşüm yapılabilir. Bunu bir örnekle açıklamak daha kolay olacaktır.

Örnek 27.13.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x.\cos^3 x dx &= \int \sin^2 x (\cos^2 x) \cos x dx \\
&= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx, \qquad (t = \sin x,\ dt = \cos x dx) \\
&= \int (t^2 - t^4) dt + C \\
&= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\
&= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.14.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x.\cos^8 x dx &= \int \sin^2 x(\cos^8 x)\sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^8 x \sin x dx, \qquad (t=\cos x,\ \ dt=-\sin x dx) \\
&= \int (1-t^2)t^8 dt + C \\
&= \int (t^8 - t^{10}) dt \\
&= \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{11}t^{11} + C \\
&= \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.15.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx, \qquad [\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C \\
&= \frac{1}{2}(x - \sin x.\cos x) + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.16.

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx, \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x)dx, \qquad [\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

27.3 Ters Trigonometrik Konumlar

Çok kullanışlı bazı ters trigonometrik konumlar (değişken değiştirimi),

$$x = a\sin\theta, \quad x = a\tan\theta, \quad x = a\sec\theta$$

fonksiyonları ile yapılır. Bunların karşıt fonksiyonları

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

dır.

Teorem 27.17.

İntegrali alınacak ifade $\sqrt{a^2-x^2}$, $(a>0)$ terimi içeriyorsa, $x = a\sin\theta$ ya da ona denk olarak $\theta = \sin^{-1}(\frac{x}{a})$ konumu yapılır.

Örnek 27.18.

a yarıçaplı bir disk içinde $b < a$ olmak üzere $[b, a]$ aralığına düşen daire kesmesinin A alanını bulunuz.

Çözüm: dairede simetriyi kullanırsak, sözkonusu alan I.bölgedeki alanın iki katı olacaktır. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
A = \int_b^a \sqrt{a^2 - x^2}dx &= \int_b^a (a^2\cos\theta)d\theta, \qquad [x = a\sin\theta,\; dx = a\cos\theta d\theta] \\
&= a^2(\theta + \sin\theta.\cos\theta)\Big|_{x=b}^{x=a} \\
&= a^2\left(\sin^{-1}(\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)\Bigg|_{x=b}^{x=a} \\
&= \frac{pi}{2}a^2 - a^2\sin^{-1}(\frac{b}{a}) - b\sqrt{a^2-b^2}
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 27.19.

$$
\begin{aligned}
A = \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx &= \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta}d\theta, \qquad [x = 3\tan\theta,\; dx = 3\sec^2\theta d\theta] \\
&= \int \sec\theta d\theta \\
&= \ln|sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C \\
&= \ln\left(\sqrt{9+x^2} + x\right) + C_1, \qquad [C_1 = C - \ln 2]
\end{aligned}
$$

çıkar.

27.4 Çözümlü Problemler

1.
$$\int dx = x + C$$

2.
$$\int k\,dx = kx + C$$

3.
$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

4.
$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

5.
$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

6.
$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

7.
$$\int x^2(1-x^3)^5\, dx = -\frac{1}{18}x^3(x^3-2)(x^6-3x^3+3)(x^6-x^3+1)+C$$

8.
$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\, dx = xsinh^{-1}(x)-\sqrt{x^2+1}+C$$

9.
$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x^2-\ln(x^2+1)\right)+C$$

10.
$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx = \frac{e^x}{x+1}+C$$

11.
$$\int xe^{-x}\, dx = -e^{-x}(x+1)+C$$

12.
$$\int x(x-1)^6\, dx = \frac{1}{8}x^8-\frac{6}{7}x^7+\frac{5}{2}x^6-4x^5+\frac{15}{4}x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^2+C$$

13.
$$\int \frac{1}{5x+3}\, dx = \frac{1}{5}\ln(5x+3)+C$$

14.
$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\, dx$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$t=\sqrt{x}$ değişken değiştirimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
t=\sqrt{x} &= \\
dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt \\
x &= t^2 \Rightarrow x+1 = t^2+1 \\
x &= 4 \mapsto t=2 \\
x &= 9 \mapsto t=3
\end{aligned} \tag{27.3}$$

değişken değiştirimi yapılınca,

$$\begin{aligned}
\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\, dx &= \int_2^3 \frac{t^2+1}{t^2+2t-3} \\
&= \int_2^3 \frac{2t^3+2t}{t^2+2t-3}dt \\
&= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{16t-12}{(t-1)(t+3)}\right)dt \\
&= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{1}{t-1}+\frac{15}{t+3}\right)dt \\
&= t^2-4t+\ln|t-1|+15\ln|t+3||_2^3 \\
&= [9-12+\ln 2+15\ln 6]-[4-8+0+15\ln 5] \\
&= \ln 2+15\ln 6+15\ln 3-15\ln 5+1 \\
&= \ln 2+15\ln 6-15\ln 5+1
\end{aligned}$$

İstenirse, 5. eşitlikten sonra t değpişkeninden tekrar x değişkenine dönüşüm yapılabilir

$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx = x-4\sqrt{x}+\ln|\sqrt{x}+3||_4^9$$
$$= \ln 2 + 15\ln 6 - 15\ln 5 + 1$$

bulunur.

15.
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu problemi çözmek için önce (29.10) eşitsizliğinin varlığını göreceğiz.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx \le \lim_{n\to\infty}\lim\int_0^{2\pi} \frac{1}{x^2+n^2} = 0 \tag{27.4}$$

Sonra Teorem **??**-10.'yu kullanacağız:

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\,dx \tag{27.5}$$
$$\le \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2}\,dx \tag{27.6}$$
$$= \frac{2\pi}{n^2} \tag{27.7}$$

Bu eşitsizliklerden limite geçersek,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx \le \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^2} = 0$$

çıkar.

16.
$$\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+3x-5)d(x^2+3x-5)$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2+3x-5)+C$$

17.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\, dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}\, dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x^2-x)}}\, dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\, dx, \quad t=(x-\frac{1}{2}) \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-t^2}}\, dt \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{t}{5/2}\right)+e \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right)+e
\end{aligned}$$

18.

$$\int_0^1 x\ln(x+3)\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$t=\ln(x+3)$ konumu yapılırsa $dv = x\, dx$, $dt=\frac{dx}{x+3}$, $v=\frac{x^2}{2}$ olur. Bunlar kısmi integral formülünde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int x\ln(x+3)\, dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+3}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int \left(x-3+\frac{9}{x+3}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-3x+9\ln(x+3)\right)+C
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 x\ln(x+3)\, dx = \frac{5}{4}-\ln 4+\frac{9}{2}\ln 3$$

bulunur.

19.

$$\int e^{x/2}\sin(ax)\, dx = \frac{1}{(a^2+\frac{1}{4})}\, e^{x/2}\left(\frac{\sin(ax)}{2}-a\cos(ax)\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

20.

$$\int \frac{1}{(3\cos x+5)}\, dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\frac{x}{2}}{2}\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

21.

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

22.
$$\int x\sin x \, dx = \sin x x\cos x + C$$

23.
$$\int e^{\sin x}\cos x \, dx = e^{\sin x} + C$$

24.
$$\int \csc(3x)\sec(3x) \, dx = \frac{1}{3}(\ln(sin(3x)) - \ln(\cos(3x))) + C$$

25.
$$\int \frac{1}{1+x^3} \, dx = \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

26.
$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} \, dx = -2\sqrt{4-x} + C$$

27.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} \, dx = -\frac{2x}{\sqrt{x^3}} + C$$

28.
$$\int 2\sin x\cos x \, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

29.
$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x} \, dx = \tan^{-1}(e^x)} + C$$

Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \frac{1}{(au+b)^2} \, du = -\frac{1}{u+a} + C, \quad (au+b \neq 0)$
2. $\int (u+b)^n \, du = \frac{1}{n+1}(u+a)^{n+1} + C,$
3. $\int u(u+a)^n \, du = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(u+a)^{n+1}((n+1)u - a) + C,$
4. $\int \frac{1}{1+u^2} \, du = tan^{-1}u + C$
5. $\int \frac{1}{a^2+u^2} \, du = \frac{1}{a}tan^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\frac{1}{a}cot^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
6. $\int \frac{1}{u^2-a^2} \, du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
7. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}}tan^{-1}(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}) + C$
8. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{2a}ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}tan^{-1}\frac{ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

Köklü İfadelerin İntegralleri:

1. $\int \sqrt{x-a} \, dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} + C$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} \, dx = 2\sqrt{x \pm a} + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} \, dx = -2\sqrt{a-x} + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \, du = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\cos^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}} \, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

7. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}\ du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{a^2 \pm u^2}}\right| + C$

8. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\ dx = \frac{1}{a}\cos^{-1}(\frac{u}{a}) = \frac{1}{a}\sec^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

9. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\ du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

10. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\ du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sin u\ du = -\cos u + C$
2. $\int \cos u\ du = \sin u + C$
3. $\int \tan u\ du = \ln|\sec u| + C = \ln|\cos u| + C$
4. $\int \cot u\ du = \ln|\sin u| + C$
5. $\int \sec u\ du = \ln|\sec u + \tan u| + C = \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$
6. $\int \sec^2 u\ du = \tan u + C$
7. $\int \csc^2 u\ du = -\cot u + C$
8. $\int \csc u \tan u\ du = \sec u + C$
9. $\int \csc u \cot u\ du = -\csc u + C$

Hiperbolik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sinh u\ du = \cosh u + C$
2. $\int \cosh u\ du = \sin u + C$
3. $\int \tanh u\ du = \ln|\cosh u| + C$
4. $\int \coth u\ du = \ln|\sinh u| + C$
5. $\int sech(u)\ du = \tanh^{-1}(\sinh u) + C$
6. $\int csch(u)\ du = -\coth^{-1}(\cosh u) + C$
7. $\int sech^2(u)\ du = \tanh u + C$
8. $\int csch^2(u)\ du = -\coth u + C$
9. $\int sech(u)\tanh u\ du = -sech(u) + C$
10. $\int csch(u)\coth u\ du = -csch(u) + C$

Üstel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int e^{ku}\ du = \frac{1}{k}e^{ku} + C$
2. $\int a^u\ du = \frac{1}{\ln a}a^u + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
3. $\int ua^{ku}\ du = \frac{1}{k\ln a}a^{ku} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
4. $\int u^2 a^{ku}\ du = a^{ku}\left(\frac{u^2}{k} - \frac{2u}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right) + C$
5. $\int \frac{e^{kx}}{x}\ dx = \ln u + \sum_{n=1}^{infty} \frac{(kx)^n}{n.n!}$

6. $\int e^{au} \sin bu\, du = \frac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu}{)} a^2 + b^2 + C$

7. $\int e^{au} \cos bu\, du = \frac{e^{au}(a \cos bu - b \sin bu)}{a^2+b^2} + C$

Logaritmik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \ln(kx)\, dx = x \ln(kx) - x + C$

2. $\int \ln(ax+b)\, dx = x \ln(ax+b) - x + \frac{b}{a} \ln(ax+b) + C$

3. $\int (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

4. $\int (\ln(kx))^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln(kx))^{n-1}\, dx + C$

5. $\int \frac{1}{\ln x}\, dx = \ln|\ln x| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n.n!} + C$

6. $\int x^m . \ln x\, dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \qquad (m \neq 1)$

7. $\int \frac{1}{x[\ln(x)]^n}\, dx = \frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$

8. $\int \ln(x^2+a^2)\, dx = x \ln(x^2+a^2) - 2x + 2a \tan^{-1}(\frac{x}{a}) + C$

9. $\int \sin(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$

10. $\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$

27.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri

27.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse

$y = \ln u \Longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln|u(x)| + C$$

yazabiliriz. Bazen uygun değişken değiştirimi ile integrali alınacak fonksiyon bu biçeme sokulabilir.

Örnekler:

1. $y = \ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

yazabiliriz.

2. İntegrali alınacak fonksiyon $\frac{1}{x-a}$ biçiminde ise, onun $\ln|x-a| + C$ foksiyonunun türevi olduğunu biliyoruz.

$$\int \frac{1}{x-2} dx \tag{27.8}$$

integralini hesaplamak için $w = x-2,\ dw = dx$ konumu yapılısa,

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{1}{w} dw = \ln|w| + C = \ln|x-2| + C$$

bulunur.

3. Paydanın türevi paya eşitse, bir değişken değiştirimi ifadeyi $\frac{dw}{u}$ biçimine dönüştürür.

$$\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr$$

integralini hesaplamak için

$$w = r^3-3r^2+1, \qquad dw = (3r^2-6r)dr = 3(r^2-2r)dr$$

konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{w}dw \\ &= \frac{1}{3}\ln|w|+C \\ &= \frac{1}{3}\ln|r^3-3r^2+1|+C\end{aligned}$$

bulunur.

4. Çoğunlukla payda'nın türevi paya eşit olmaz. Bu durumlarda da değişken değiştirimi bazen işe yarayabilir.

$$\int \frac{s+2}{s+3}ds$$

integralini hesaplamak için $w = s-3, \quad dw = ds$ konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{s+2}{s+3}ds = \int \frac{w+5}{w}dw &= \int \left(1+\frac{5}{w}\right)dw \\ &= w+5\ln|w|+C \\ &= s-3+5\ln|s-3|+C\end{aligned}$$

bulunur.

27.5.2 Basit Kesirlere ayırma

Teorem 27.20. *$\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu için, payın derecesi paydadınkinden küçük ve paydanın baş katsayısı 1 olsun. Payda*

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

gibi doğrusal çarpanlarına ayrılabiliyorsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_1}{x-a_2}+\dots+\frac{A_1}{x-a_n} \tag{27.9}$$

biçeminde yazılabilir.

Bu teoremin formal ispatını vermeye gerek kalmadan, integral hesabında gerekli olacağı için $A_1, A_2, \dots, A_n$ katsayılarının hesaplanışını göstereceğiz. O eylem ispat yerine geçecektir. Bunun için yapılacak iş basittir. (29.15) ifadesinin sağ yanındaki terimlerin paydalarını eşitleyip ortak payda altında toplarız. Sağ tarafın payına

gelecek olan polinoma $S(x)$ dersek, (29.15) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} \tag{27.10}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan $P(x) \equiv S(x)$ olması gerektiği çıkar. Bu özdeşlikte eşit dereceli terimlerin katsayılarını eşitleyerek istenen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ katsayıları hesaplanabilir.

Katsayıları kolay hesaplamaya yarayan başka pratik bir yöntem de şöyledir: (29.15) eşitliğinin iki yanını herhangi bir $(x - a_j)$ ile çarpıp $x \to a_j$ iken limiti hesaplayalım: Her $(1 \le j \le n)$ için,

$$A_j = \lim_{x \to a_j} (x - a_j)\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a_j)}{(a_j - a_1)(a_j - a_2)\ldots(a_j - a_n)} \tag{27.11}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte paydası $(x - a_j)$ olan terime karşılık gelen A_j katsayısı bulunmuş olur. Her $(1 \le j \le n)$ için bu eylem yapılırsa, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ katsayıları hesaplanmış olur. Bu işleme dikkat edersek, yapılan iş,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)} \tag{27.12}$$

eşitliğinin sağ yanında paydadaki $(x - a_j)$ çarpanını yok sayıp geride kalan ifadede x yerine a_j koymaktan ibarettir. Katsayıların hesaplanmasında bu oldukça kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

Örnekler: Bazen paydayı çarpanlarına ayırmak integral işlemini basitleştirir.

5.

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}dx \tag{27.13}$$

integralini hesplamak için, ifadeyi basit kesirlerine ayıracağız.

$$\begin{aligned}
\frac{x+4}{x^2-5x+6} &= \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} && (27.14)\\
&= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} && (27.15)\\
&= \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} && (27.16)\\
&\Longrightarrow (A+B) = 1, \qquad -3A-2B = 4 && (27.17)\\
&\Longrightarrow a = -6, \quad B = 7 && (27.18)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}dx &= -6\int \frac{1}{x-2}dx + 7\int \frac{1}{x-3}dx && (27.19)\\
&= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C && (27.20)
\end{aligned}$$

çıkar.

6.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)}dx &= \frac{A}{x-2} + \frac{A}{x+2} + \frac{A}{x-5}\\
&= \frac{104}{84(x-5)} + \frac{35}{x-2} + \frac{15}{x+2}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)}dx = \int \frac{104}{84(x-5)} + \int \frac{35}{x-2} + \int \frac{15}{x+2}$$
$$= \frac{1}{84}(104\ln|x-5| - 35\ln|x-2| + 15\ln|x+2| + C$$

bulunur.

7. Payın derecesi paydanınkinden büyükse, önce bölme işlemi yapılır, sonra yukarıdaki yönteme başvurulur:

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx$$

integralini hesaplamak için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^3-4}{x^2-x-2} = (x+2) + \frac{9x+2}{x^2-x-2}$$

olduğundan

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx = \int (x+2)dx + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx$$

yazılabilir. Sağdaki integrali hesaplamak için,

$$\frac{9x+2}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$
$$\Longrightarrow A = \frac{7}{3},\ B = \frac{20}{3}$$

olduğu düşünülürse,

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C_2$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x + +\frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C, \qquad (C = C_1 + C_2)$$

bulunur.

8.

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx = \int \left(1 + \frac{x+2}{x^3-x}\right)dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x}dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yandaki integral içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$
$$= \frac{A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ -A=2 \end{cases}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = -2$, $B = 3/2$, $C = 1/2$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx &= x - 2\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C\end{aligned}$$

çıkar.

9. Paydanın bir yada iki dereceli bir çarpanı m kez tekrar ediyorsa, onu kesirlerine ayırırken söz konusu çarpan için, dereceleri 1 den m ye kadar değişen terimler eklenir.

Örnek 27.21.

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2}$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A + B + & = 0 \\ -2A - B + C & = 0 \\ A & = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2} &= \int \frac{1}{x}dx \; - \int \frac{1}{x-1}dx \; + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

çıkar.

27.5.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa

Payda'da $ax^2 + bx + c$ gibi ikinci dereceden bir çarpan var ve $b^2 - 4ac < 0$ ise o çarpana ait gerçel kök yoktur. Basit kesirlere ayırırken ona ait terimi $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ biçiminde yazarız. Tabii, aynı düşünceyi

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx, \; \int \frac{x}{x^2+a^2}dx, \; \int \frac{1}{x^2-a^2}dx, \; \int \frac{x}{x^2-a^2}dx$$

tipi integrallerin hepsine uygulayabiliriz. Sonuçlar daima,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan -1\left(\frac{x}{a}\right) + C \tag{27.21}$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C \tag{27.22}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C \tag{27.23}$$

$$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C \tag{27.24}$$

formüllerine indirgenebilir.

Örnekler

1.

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3+x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx = \int \left(\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} &= \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\
&= \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x-1)(x+1)} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B &= 1 \\ C &= 3 \\ A &= 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=2,\ B=-1,\ C=3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1} + 3\int \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\tan^{-1}x + C
\end{aligned}$$

çıkar.

2.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \int \left(\frac{1}{(x-a)(x+a)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a)} + \frac{B}{x+a} \\
&= \frac{Ax+Aa+Bx-Ba}{(x^2-a^2} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B &= 0 \\ Aa-Ba &= 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/(2a),\ B = -1/(2a)$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}dx \\
&= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C \\
&= \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

3. Bazen uygun bir değişken değiştirimi ile payda'nın türevi paya eşitlenebilir.

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5 44x^3+x} dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x} dx = \int \left(\frac{x^2+2}{x((2x^2+1)(2x^2+1)^2} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2} \\
&= \frac{A(4x^2+4x+1)+B(2x^4+x^2)+C(2x^3+x)+Dx^2+Ex}{4x^5+4x^3+x} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 4A+2B & =0 \\ 2C & 0 \\ 4A+B+D & =1 \\ A & =2 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 2$, $B = -4$, $C = 0$ $D = -3$, $E = 0$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x} dx &= 2\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{xdx}{2x^2+1} - 3\int \frac{xdx}{(2x^2+1)^2} \\
&= 2\ln|x| - \int \frac{du}{u} - \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2}, \qquad (u = 2x^2+1) \\
&= 2\ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C \\
&= 2\ln\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right) + \frac{3}{4}\,\frac{1}{2x^2+1} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

4.

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1} \right) dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \\
&= \frac{A(x^2-x+1)+B(x^2+x)+C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B & =0 \\ -A+B+C & =0 \\ A+C & =1 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/3,\ B = -1/3,\ C = 2/3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

çıkar.

27.6 *Karma problemler*

1. Aşağıdaki integral formüllerini doğruluğunu sağlayınız.

Örnek 27.22.

$$\int \frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Örnek 27.23.

$$\int \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}C$$

Örnek 27.24.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

Örnek 27.25.

$$\int \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2\tan x se^2 x + C$$

Örnek 27.26.

$$\int x(a^x)dx = \frac{a^x(\ln a - 1)}{\ln^2 a} + C$$

Örnek 27.27.

$$\int x(\sinh x)dx = x(\cosh x) + \sinh x + C$$

Örnek 27.28.

$$\int \sin\sqrt{x}dx = 2(\sin\sqrt{x} - 2\cos\sqrt{x} + C$$

Örnek 27.29.

$$\int \sin^{-1}(\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}(\sqrt{-(x-1)x} + \sin^{-1}(\sqrt{x}) + C$$

Örnek 27.30.

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x})dx = (x+1)tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$$

Örnek 27.31.

$$\int x\ln x = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

2. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

Örnek 27.32.

$$\int \frac{x^2-5x-9}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \left\{\frac{1}{6}(-13\ln(x-1) + 9\ln(x+1) + 10\ln(x+2))\right\} + C$$

Örnek 27.33.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\
&= \frac{A(x+2)^2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A & = 4 \\ A+B & = 3 \\ B = & = 3 - A = 3 - 4 = -1 \\ C & = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 4$, $B = -1$, $C = 3$ bulunur. O halde,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3\int (x+2)^{-2}dx + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 27.34.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$
\begin{aligned}
\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\
&= \frac{A(x+2)^2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A & = 4 \\ A+B & = 3 \\ B= & = 3-A = 3-4 = -1 \\ C & = 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 4,\ B = -1,\ C = 3$ bulunur. O halde,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3\int (x+2)^{-2}dx + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 27.35.

$$
\begin{aligned}
\int (1-3x)^5 dx &\Longrightarrow t = 1-3x,\ dt = 3dx \\
&= \int t^5 (\frac{-1}{3} dt \\
&= \frac{-1}{3}\frac{1}{6}t^6 \\
&= \frac{-1}{18}(1-3x)^6 + C
\end{aligned}
$$

Örnek 27.36.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\ln x+4)^3}{x}dx \Longrightarrow t = \ln x+4,\ dt = \frac{1}{x}dx \\
&= \int t^3 dt \\
&= \frac{1}{4}t^4 \\
&= \frac{1}{4}(\ln x+4)^4 + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.37.

$$\begin{aligned}
\int a^x dx \Longrightarrow t = a^x \Rightarrow t = e^{x\ln a}, \\
&= \int e^{x\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}e^{x\ln a} + C \\
&= \frac{1}{\ln a}a^x + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.38.

$$\begin{aligned}
\int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \Longrightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt, \\
&= 2\int a^t dt \\
&= \frac{2}{\ln a}a^t + C \\
&= \frac{2}{\ln a}a^{\sqrt{x}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.39.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{1+x^8}dx \Longrightarrow t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3 dt, \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2}dt \\
&= \frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4) + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.40.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx \Longrightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \\
&= \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}dx \\
&= \ln|\sin x + \cos x| + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.41.

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\cos^5 x}\, \sin x dx &\Longrightarrow t = \cos x,\ dt = -\sin x dx \\
&= -\int \sqrt{t^5} dt \\
&= -\int t^{5/2} dt \\
&= -\frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C \\
&= -\frac{2}{7} (\cos^{\frac{7}{2}} x + C
\end{aligned}
$$

Örnek 27.42.

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \sqrt{x-3}\, dx &\Longrightarrow t^2 = x-3,\ 2t dt = dx,\ x = t^2 + 3 \\
&= \int (t^2+3)^3 . t . (2t dt), \qquad [(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3] \\
&= 2\int (t^8 + 9t^6 + 27t^4 + 27t^2) dt \\
&= \frac{2}{9} t^9 + \frac{18}{7} t^7 + \frac{54}{5} t^5 + \frac{54}{3} t^3 + C \\
&= \frac{2}{9} (x-3)^{\frac{9}{2}} + \frac{18}{7} (x-3)^{\frac{7}{2}} + \frac{54}{5} (x-3)^{\frac{5}{2}} + 18(x-3)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

Örnek 27.43.

$ekok\{4,\ 5\} = 20 \Rightarrow t^{20} = x+1,\ 20t^{19} dt = dx,\ x = t^{20} - 1$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3 + \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}}\, dx &= \int \frac{3 + \sqrt[4]{t^{20}}}{\sqrt[5]{t^{20}}} (20t^{19} dt \\
&= \int \frac{3 + t^5}{t^4} (20t^{19}) dt \\
&= 20 \int \left(t^{20} + \frac{3t^{19}}{t^4} \right) dt \\
&= \frac{20}{21} t^{21} + \frac{15}{4} t^{16} + C \\
&= \frac{20}{21} (x+1)^{\frac{21}{20}} + \frac{15}{4} (x+1)^{\frac{4}{5}} + C
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 27.44.

$u = x,\ dv = e^x dx,\ du = dx,\ v = e^x,\ \int u\, dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
\int xe^x\, dx &= xe^x - \int e^x\, dx \\
&= xe^x - e^x + C \\
&= e^x (x-1)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 27.45.

$u=x^2,\ dv=e^x dx,\ du=2xdx,\ v=e^x,\ \int u\,dv=u.v-\int v.du$ konumuyla,

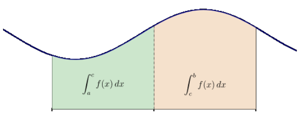
$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x-2\int xe^x\,dx\\ &= x^2e^x-2e^x(x-1)+C\\ &= e^x(x^2-2x+2)+C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.46.

$y=f(x),\ Ox,\ x=a,\ x=b$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan,

$$\int_a^b f(x)dx \tag{27.25}$$

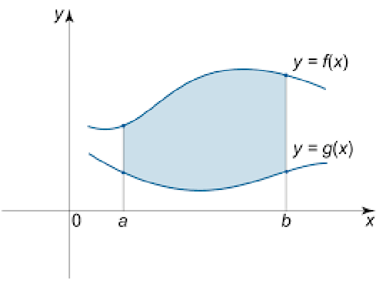


Şekil 27.1: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması

belirli integrline eşittir.

Örnek 27.47.

$y=2x$ eğrsi, Ox doğrusu, $x=1$ ve $x=2$ doğrularının sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.

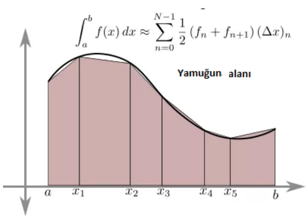


Şekil 27.2: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması

$$A=\int_1^2 2xdx \tag{27.26}$$
$$= x^2\Big|_1^2 \tag{27.27}$$
$$=2^2-1=3 \tag{27.28}$$

$$A=\frac{2+4}{2}\times 1=2 \tag{27.29}$$

Aynı sonucu, Şekil 28.5'deki yamuğun alan formülü ile de bulabiliriz. Anımsayacağınız gibi, yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yarısının yüksekliği ile çarpımına eşittir.

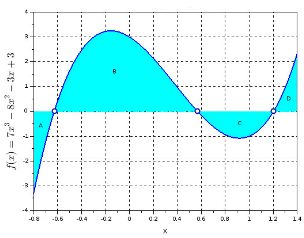


55

Şekil 27.3: Yamuğun Alanı

Bazı aralıklarda $y=f(x)$ fonksiyonu negatif değerler alabilir. O zaman (28.26) Riemann toplamındaki negatif y_i ler için gikdörtgen alanları negatif olur. Oysa, düzlemsel alanın değeri daima pozitif olmalıdır.Negatif alan tanımmlı değildir. O nedenle, negatif alanları pozitif yapmalıyız. Bunu yapmak için fonksiyonun negatif değerler aldığı aralıkları saptar ve onlar için bulduğumuz belirli integrali pozitif yaparız. Bu eylemi pratik bir formüle bağlamak da mümkündür:

$$A=\int_a^b |f(x)|dx \tag{27.30}$$



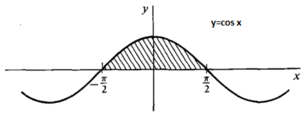
Şekil 27.4: Negatif Alanlar

Örnek 27.48.

eğrisi altında ve $[\frac{1}{2}, 1]$ alaığı üzerinde kalan alanı bulunuz. Verilen bölgede $y = \cos x$ fonksiyonu pozitif değerler aldığı için, istenen alan,

$$\begin{aligned} A = \int_{0.5}^{1} \cos x dx &= \sin x|_{0.5}^{1} && (27.31) \\ &= \sin(1) - \sin(0.5) && (27.32) \\ &= 0.841 - 0.479 && (27.33) \\ &= 0.362 && (27.34) \end{aligned}$$

olur.



Şekil 27.5: $y = \cos x$ altındaki Alan

Örnek 27.49.

Yarıçapı $r = 3$ olan dairenin üst yarı düzlemdeki alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx &= \int 3\sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt, \quad [x = 3\sin t, \quad dx = 3\cos t dt] \\ &= 9\int_0^{\pi/2} cos^2 t dt \\ &= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\ dt \\ &= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\int \cos 2t\ dt \\ &= \left.\frac{9}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t\right|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{2}\sin -1(1) \\ &= \frac{9}{2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{9\pi}{4} \end{aligned}$$

olur.

Uyarı 27.50. *Aşağıdaki integral formülü kullanılırsa aynı sonuç elde edilir.*

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\ du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$$

Örnek 27.51.

$$\int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{1}{3}x^3\right|_0^3 = 9$$

Örnek 27.52.

$$\begin{aligned} \int_0^2 (4x^3 - 9x^2) dx &= 4\int_0^2 x^3 dx - 9\int_0^2 x^2 dx \\ &= (x^4 - 3x^3)|_0^2 \\ &= 2^4 - 3(2)^3 \\ &= 1624 = -8 \end{aligned}$$

Örnek 27.53.

$$\int_{-2}^{0}(2x-1)^2dx = \frac{1}{8}(2x-1)^4\Big|_{-2}^{0} = -78$$

Örnek 27.54.

$y = x^2 - 4x + 5$ ile $y = 2x - 3$ eğrileri arqasında kalan alanı bulunuz.

$$\begin{aligned}\int_{1}^{3}[(x^2-4x+5)]dx &= \int_{2}^{4}(-x^2-4x+5)dx \\ &= \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x)\Big|_{1}^{3} \qquad = (\frac{64}{3} + 48 - 32) \\ &= \frac{64}{3}\end{aligned}$$

Örnek 27.55.

$$\int_{0}^{2}2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{0}^{3} = \frac{2^3}{\ln 2} = \frac{8}{\ln 2}$$

Örnek 27.56.

$$\int_{0}^{2\sqrt{2}}(x^2+1)dx = \frac{x^3}{3} + x\Big|_{0}^{2\sqrt{2}} = \frac{22\sqrt{2}}{3}$$

Örnek 27.57.

$y = 1 - x^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})}(1-x-x^2)dx = 5\frac{5}{6} = 1.86339$$

Örnek 27.58.

$y = 16x - 10x^2 + x^3$ ile $y = -16x + 10x^2 - x^3$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{0}^{2}(32x-20x^2+x^3)dx + \int_{2}^{8}(32x-20x^2+x^3)dx = \frac{1136}{3} = 378.667$$

Örnek 27.59.

$y = |x|$ ile $y = 6 - x^2$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{-3}^{3}(6-x^2+|x|)dx = 27$$

Örnek 27.60.

$[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde $y = \sin x$ ile $y = \cos x$ eğrileri arasında ve [kalan alanı bulunuz.

$$\int_{0}^{\pi/4}(\cos - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi}(-\cos + \sin x)dx = 2\sqrt{2} \approx 2.82843$$

27.7 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{3dx}{3x-4}$ 2. $\int \frac{dx}{3-5x}$
3. $\int \frac{xdx}{\pi x-3}$ 4. $\int \frac{x^2dx}{x-3}$
5. $\int \frac{dx}{x^2-4}$ 6. $\int \frac{dx}{3-x^2}$
7. $\int \frac{x^2}{x^2+2x-2}$ 8. $\int \frac{xdx}{3-x^2}$
9. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ 10. $\int \frac{1}{a^2-b^2x^2}dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{x-3}{x^2+x}dx$ 2. $\int \frac{1}{9x+x^3}dx$
3. $\int \frac{1}{9x^2-6x+2}dx$ 4. $\int \frac{x}{2+6x+9x^2}dx$
5. $\int \frac{1+x^2}{9x^2-6x}$ 6. $\int \frac{1+x^3}{x^2+7x+12}dx$
7. $\int \frac{x^3}{x^3-a^3}$ 8. $\int \frac{dx}{2x+2x^2+x^3}$
9. $\int \frac{1}{x^4-3x^3}$ 10. $\int \frac{x}{1-x+x^2}dx$

27.8 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa

Bir fonksiyonun integralini almak demek, o fonsiyonu türev kabul eden fonksiyonları bulmak demektir. Öyleyse, işin esası (f, f') (fonkion-türevi) eşleşmesidir. Bir fonksiyonun sonsuz çokluktaki belirsiz integralleri (ilkelleri) birer sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğuna göre, sabiti ihmal ederek(f, f') eşleşmesini bire bir imiş gibi görebiliriz.

Calculu'ta türev alma kuralları integral alma kurallarından daha yeteneklidir. Türevi olan her fonksiyonun türevini bulmamızı sağlar. Ama bu kesimde göreceğimiz gibi, integral alma kurallarımız çok yetenekli değildir. Bir fonksiyonun integralinin varlığını biliyor olsak bile, bazen o integrali bulamayabiliriz. Bunun tipik örneği $\int e^{x^2}dx$ integralidir. integrand sürekli olduğu için, integralin varlığını biliyoruz, ama e^{x^2} fonksiyonunu türev olarak kabul eden fonksiyonu bilmiyoruz.

İntegral alma eyleminde genel sayılacak tek kural, integrandı türev kabul eden fonksiyonun bulunması eylemidir. Bu eylem sonuç olarak (f, f') eşleşmesine indiegenir. Bütün integral alma yöntemleri sonunda (f, f') eşleşmesini kullanır. O nedenle ne kadar çok fonksiyonun türevini biliyorsak, ters işlemi, yani türevden ilkel fonksiyonu bulma eylemini de o kadar biliyor oluruz. Bunun için türev alma kuralları bize çok bilgi veriyor. Sabitler, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, ters fonksiyonlar gibi bir sınıflandırmayla pratikte çok kullanılan fonksiyonların türevlerini listeleyebiliyoruz. Oradan ters dönüşüm yaparak (f, f') eşleşmesine dönebiliriz.

Genel geçerliği olan yöntem olmadığı için, fonksiyonları alt sınıflara ayırıp, her sınıf için geçerli olan integral alma yöntemlerini ortaya koyacağız. Yukarıda da söylediğimiz gibi, alt sınıflara bölme sorunu tam çözmüyor. Ama oldukça iyi sonuçlar veriyor. Bilmemiz gereken şey, hangi alt sınıfta hangi yöntemi kullanıyorsak kullanalım, sonuçta (f, f') eşleşmesini kurabilirsek integrali çözmüş oluyoruz.

Doğal olarak, alt sınıflarda integral alırken bazı kurallar ortaya çıkıyor. Onları birer alet (fomül) olarak kullanıyoruz. Aletler çok işimize yarar.

Alt sınıflara bölme eylemi için de genel geçerliği olan yöntemden söz edilemez. Ama tarih boyunca sınama-yanılma yöntemiyle ortaya çıkarılan bazı sınıflar oldukça standart sayılır. Bu kesimde onları ele alacağız. Yine de ele aldığımız alt sınıfların tam bir liste oluşturmadığını bilmeliyiz.

27.9 *Sürekli Fonksiyonların İntegrali*

Sürekli fonksiyonların ilkelleri vardır. Bunu bir teoremle ifade edebiliriz:

Teorem 27.61. *I aralığında $f(x)$ sürekli ve her $a \in I$ noktsında, değişken x değeri için*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{27.35}$$

ise $F(x)$ fonksiyonu I aralığında $f(x)$ fonksiyonunun ilkelidir. Başka bir deyişle, her $x \in I$ noktasınad $F'(x) = f(x)$ olur.

İspat:

x ile $x + \Delta x$ noktaları I aralığında iseler;

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

yazılabilir. Sağ yandaki ifdeye integralin ortalama değer teoremini uygularsak,

$$F(x+\Delta x) - F(x) = (x + \Delta x - x) f(c) = f(c)\Delta x$$

bağıntısını sağlayan ve Δx sayısının pozitif ya da negatif oluşuna bağlı olarak değişmek üzere

$(x \le c \le x + \Delta x)$, $(x + \Delta x \le x \le x)$ aralıklarının birinde olan olan bir c noktasının varlığını söyleyebiliriz. c noktası Δx değerine bağlıdır: $\Delta x \to 0 \Rightarrow c \to x$ olur. f sürekli olduğundan $\Delta x \to 0$ iken $f(c) \to f(x)$

olacaktır. Buradan türev tanımına geçersek,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c).\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olur ki bu istenen sonuçtur.

27.10 *Değişken Değiştirme*

Belirsiz integral alırken, genellikle ilkel fonksiyonu hemen göremeyiz O durumlarda, uygun bir değişken değiştirme (yerine koyma) ile integrali bilinen bir biçeme sokarız. Bunu yaptıran kural şudur.

Teorem 27.62. *$f(u)$ süreki ve $u(x)$ sürekli türevi var olan bir fonksiyon ise*

$$f(u(x)u'(x)\,dx = \int f(u)\,du\Big|_{u=u(x)} \tag{27.36}$$

Sağ yandaki terimin anlamı açıktır. $\int f(u)du$ integrli bulunduktan sunra $u = u(x)$ konularak sıl x değişkenine dönülür.

İspat:

$F(x)$ fonksionu $f(x$ fonksiyonunun ilkeli olsun. F nin varlığı f nin sürkliliği ile garanti edilir. Bkz (25.1). Zincir kuralı gereğnce,

$$\frac{d}{dx}F'(u(x)) = F'(u(x))u'(x)$$

yazabiliriz. Öyleyse,

$$\begin{aligned} \int f(u(x))u'(x)\,dx &= \int F'(u(x))u'(x)\,dx \\ &= f(u(x)) + C \quad (C \text{ sabit }) \end{aligned}$$

Son iki ifadeden, aranan (25.2) eşitliği çıkar.

Değişken değiştirmede, integranddaki asıl değişkenin yerine hangi değişkenin konulacağını söyleyen genel bir yöntem yoktur. Bu eylem integrali alanın deneyimine bağlı bir tür sınama-yanılma sürecidir. İntegral kavramı ortaya çıktığından beri çok sayıda sınama-yanılma yapılmış ve başarılı olanlar öne çıkmıştır. Aslında bütün integral alma eylemleri öyledir. Genel yöntem ortaya konamayınca, problem alt sınıflara bölünür ve her bir alt sınıfta geçerli olan çözüm yolları ortaya konulur.

Örnek 27.63. $\int sin^3 x.cosx\,dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = sinx \longrightarrow du = cosxdx$ konumuyla,

$$\begin{aligned} \int sin^3 x.cosx\,dx &= \int u^3 du \\ &= \frac{1}{4}u^4 \\ &= \frac{1}{4}sin^4 x + C \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.64. $\int sin^3 x\,dx$

integralini hsaplayınız.

Çözüm: Burada ilk örnekteki değişken değiştirme, integrandın ilkelini bulmaya yarayacak iyi bir sonuç vermez. Trigonometrk formülleri kullanarak biraz işlem yaparsak, $u = cosx \rightarrow du = -sinx$ konumunun daha iyi sonuç vereceği görülebilir:

$$\begin{aligned}
\int sin^3 x\,dx &= \int (sin^2 x) sinx\,dx \\
&= \int (1 - cos^2 x) sinx\,dx \\
&= \int sinxdc - \int cos^2 x sinx\,dx \\
&= -cosx + \int u^2\,du \\
&= -cosx + \frac{1}{3} cos^3 x + C \\
&= \frac{1}{4} u^4 \\
&= \frac{1}{4} sin^4 x + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.65. $I = \int (1-2x)^9 x\,dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu integrali hesaplamak için akla ilk gelen yol, istegrandı binom formülüne göre açmak, sonra çıka polinomu terim terime integre etmektir. O yöntem doğru ama uzun bir yöntemdir. Onun yerine $u = 1-2x$, $du = -2dx$ konumu işlemleri çok kısaltacaktır:

$$\begin{aligned}
\int (1-2x)^9 x\,dx &= -\frac{1}{2} \int (1-2x)^9 (-2dx) \\
&= -\frac{1}{2} \int (u)^9 (du) \\
&= -\frac{1}{20} u^{10} + C \\
&= -\frac{1}{20} (1-2x)^{10} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 27.66. $I = \int_{+3}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

İntegrali alınacak ifadeyi karekökten kurtarmak için $x = \frac{3}{\cos t}$, $dx = 3\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$ ve sınırlar için, $2\sqrt{3} = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow t = \frac{pi}{}$; $+3 = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow T = 0$ konumu yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} . \frac{3\sin t}{\cos^2 t} dt \\
&= \int_0^{\frac{pi}{6}} \frac{\cos t}{3\sin t} . \frac{3\sin t}{\cos^2 t} dt \\
&= \int_0^{\frac{pi}{6}} \frac{dt}{\cos t} \\
&= \int_0^{\frac{pi}{6}} \sec t \, dt \\
&= ln|\sec t + \tan t|_0^{\frac{pi}{6}} \\
&= ln\left|\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right| - ln|1+0| \\
&= ln\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Örnek 27.67. $I = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekök ile küp kökü yoketmek için 2 il 3 sayılarının ek küçük ortak katını (ekok) alalım. $x = t^6$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5 dt$ konumuyla

$$
I = 6\int \frac{t^8}{t^2-1} dt
$$

$$
\frac{t^8}{t^2-1} = t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= 6\int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt \\
&= 6\left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C \\
&= 6\left(\frac{x^{7/6}}{7} + \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + x^{1/6} + \frac{1}{2}\left|\frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1}\right|\right) + C
\end{aligned}
$$

Örnek 27.68. $I = \frac{x^4}{x^2+1} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: payın drecesi paydanın derecesnden küçük olmadığı için, önce payı paydaya bölmeliyiz.

$$
\begin{aligned}
I &= \int dx - \int 2dxx^2 + 1 + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\
&= x - 2arctanx + \left(\frac{1}{2}arctanx + \frac{x}{x^2+1}\right) + C
\end{aligned}
$$

Örnek 27.69. $I = \frac{dx}{x^2+1} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = tant$, $dx = \sec^2 t dt$ konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sec^2 t}{(\tan^2 t+1)^2} \\ &= \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t.\cos t + C \\ &= \frac{1}{2}\Big(arctanx + \Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)\Big) + C \end{aligned}$$

27.11 $\tan\frac{\theta}{2}$ *Konumu*

Bazı integrallerde değişken değiştirimi işi kolaylaştırır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x &= \tan\frac{\theta}{2} \\ \cos\theta &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \sin\theta &= \frac{2x}{1+x^2} \\ d\theta &= \frac{2dx}{1+x^2} \\ \theta &= 12\arctan x \\ x &= a\sin\theta \Leftrightarrow \theta = \arcsin\frac{x}{a} \\ x &= a\tan\theta \Leftrightarrow \theta = \arctan\frac{x}{a} \\ x &= a\sec\theta \Leftrightarrow \theta = arcsec\frac{x}{a} = \arccos\frac{x}{a} \end{aligned}$$

değişken değiştirimleri kullanılabilir.

Örnek 27.70.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta} dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$x = \tan\frac{\theta}{2}, \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}, d\theta = \frac{2dx}{1+x^2}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}}\\
&= \int \frac{2x}{2x+2}\\
&= \int \frac{dx}{x+1}\\
&= \ln|x+1|\\
&= \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}+1\right|_0^{\pi/2}\\
&= \ln 2 - \ln 1\\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.71.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$x = \frac{1}{2}\sin t, dx = \frac{1}{2}\cos t\,dt, 1-4x^2 = 1-4\frac{1}{4}\sin^2 t = 1-\sin^2 t = \cos^2 t, 2x = \sin t, t0\arcsin(2x)$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx\\
&= \int \frac{(1/2)\cos t}{\cos t}\,dt\\
&= \frac{1}{2}t + C\\
&= \frac{1}{2}\arcsin(2x) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.72.

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx\\
&= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 t}{\cos t}\,dt\\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt\\
&= \frac{1}{4}\int \frac{(1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt\\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos t}\,dt - \frac{1}{4}\int \cos t\,dt\\
&= \ln|secx + tanx| + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.73.
$$I=\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x=3\sin t, dx=3\cos t\,dt, 9-x^2=9\cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx\\&=\int \frac{9\cos^2 t}{3\cos t}\,dt\\&=3\int \cos t\,dt\\&=3\sin t+C\\&=3\arcsin\frac{x}{3}+C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.74.
$$I=\int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x=\frac{1}{2}\sin t, dx=\frac{1}{2}\cos t\,dt, 1-4x^2=\cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx\\&=\int \frac{\frac{1}{2}\cos t}{\frac{1}{2}\sin t.\cos t}\,dt\\&=\int \frac{dt}{\sin t}\\&=\int \sec t\,dt\\&=\frac{sec t(\sec t+\tan t)}{\sec t+\tan t}\end{aligned}$$

$$u=\sec t+\tan t, du=\sec t\tan t+\sec^2 t=\sec t(\sec t+\tan t)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{du}{u}\\&=\ln|u|+C\\&=\ln|sect+tant|+C\end{aligned}$$

$$x=\frac{1}{2}\sin t\Rightarrow 2x=\sin t\Rightarrow \sec t=\frac{1}{2x}$$

konumuyla,
$$I=\ln\left|\frac{1}{2x}+\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right|+C$$

bulunur.

Örnek 27.75.

$$I = \int \frac{\sin^5}{\sqrt{\cos x}} dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x \, dx$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin^5}{\sqrt{\cos x}} dx \\
&= \int \frac{(1-u^2)^2}{\sqrt{u}} \\
&= -\int (u^{\frac{7}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}) du \\
&= -\frac{2}{9} u^{\frac{9}{2}} + \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= -\frac{2}{9} (\cos x)^{\frac{9}{2}} + \frac{4}{5} (\cos x)^{\frac{5}{2}} - 2(\cos x)^{\frac{1}{2}} + C
\end{aligned}$$

27.12 *Kısmi İntegrasyon*

İntegrali alınacak fonksiyonun ilkeli hemen görülemiyor, değişken değiştirimi için uygun bir değişken bulunamıyor ise kısmi integrasyon denilen yöntem bazen çözüm için uygun yol olabilir. Bu yöntem aslında iki fonksiyonun çarpımının türevine dayalıdır:

$$\int u \, dv \tag{27.37}$$

integralini arıyor olalım. uv çarpımının diferensiyeli olan

$$d(uv) = u dv + v du$$

eşitiğinin iki yanının integralleri de eşit olmalıdır:

$$uv = \int u \, dv + \int v \, du$$

Buradan

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \tag{27.38}$$

bağıntısı çıkar. Bu aradığımız (25.5) integralidir. Bundan böyle (25.6) eşitliğini bir formül olarak kullanacağız. Bu yöntem öncelikle integrali alınacak fonksiyonun $uv \, dx$ biçiminde yazılabilmesini ve bir ya da ardışık kısmi integrasyon uygulamalarınad u çarpanının yok olmasını gerektirir. Aşağıdaki örnekler, kısmi integrasyon yönteminin nasıl çalıştığını gösterecektir.

Örnek 27.76.

$$\int xe^x \, dx \tag{27.39}$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

İntegrandı iki fonksiyonun çarpımı biçimine getirelim: $u = x$, $dv = e^x dx$ konumuyla,

$$\int xe^x \, dx = xE3x - \int e^x \, dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$

Uyarı: Yukarıdaki değiken değiştirme eyleminde $u = e^x$, $dv = x\,dx$ alınmış olsaydı

$$\int xe^x \, dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$$

gibi çözümü aslından daha zor olan bir integral ortaya çıkardı. O nedenle, kısmi integrasyon kullanılırken, işlem sonunda çarpanlardan birisinin yok olması önem kazanır.

Örnek 27.77.

$$\int \cos x e^{-x} \, dx \tag{27.40}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Türev ve integral işlemlerinde e^{-x} yok olmayacağına göre $\cos x$ fonksiyonu yokolması gereken fonksiyon olarak karşımıza çıkar.Tabii, bu fonksiyon da bir kez türev ya da integral larak yok edilemez. Ama ii defa türev alınca, kendisine eşit olacağından, bir aritmetik işlemle istenenintegrali elde edebiliriz:

$$\int \cos x e^{-x} \, dx = \sin x e^{-x} + \int sinx e^{-x} \, dx$$

Sondaki integrale tekrar kısmi integral uygularsak,

$$\int \sin x e^{-x} \, dx = \sin x e^{-x} - \int \cos x e^{-x} \, dx$$

çıkar. Son iki ifadeyi bir araya getirisek,

$$\int \cos x e^{-x} \, dx = \sin x e^{-x} - \cos x e^{-x} - \int \cos x e^{-x} \, dx \tag{27.41}$$

Dikkat edersek, son ifadedeki iki integral aynıdır. Dolayısıyla, eşitliği

$$\int \cos x e^{-x} \, dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C \tag{27.42}$$

biçiminde yazabiliriz.

Örnek 27.78.

$$\int (3x+5) \cos \frac{x}{4} \, dx \tag{27.43}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Kısmi integrasyon uygularken polinom biçimindeki fonkiyonların ilk adımda ya da ardışık adımlarda yok olacağını düşünerek,

$u = 3x + 5$, $dv = \cos \frac{x}{4}$, $du = 3dx$, $v = 4sin\frac{x}{4}$

konumlarını yapabiliriz. Buradan,

$$\int (3x+5) \cos \frac{x}{4} \, dx = 4(3x+5) \sin \frac{x}{4} - 12 \int \sin \frac{x}{4} \, dx$$
$$= 4(3x+5) \sin \frac{x}{4} + 48 \cos \frac{x}{4} + C$$

olur.

Örnek 27.79.

$$\int x^2 \sin(10x)\, dx \tag{27.44}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = x^2$, $dv = \sin(10x)dx$, $du = 2xdx$, $v = -\frac{1}{10}\cos(10x)$

konumu yapılırsa,kısmi integrasyon formülünden

$$x^2 \sin(10x)dx = -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\int x\cos(10x)dx$$

yazılabilir. Sğdaki integral için bir kez daha kısmi integrasyon uygulnabilr:

$u = x$, $dv = \cos(10x)$, $du = dx$, $v = \frac{1}{10}\sin(10x)$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(10x)\, dx &= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}\sin(10x) - \frac{1}{10}\int sin(10x)dx\right) \\
&= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}\sin(10x) + \frac{1}{100}\cos(10x)\right) + C \\
&= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{x}{50}\sin(10x) + \frac{1}{500}\cos(10x) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 27.80.

$$I = \int_0^1 \arctan x\, dx, \tag{27.45}$$

integralini bulunuz.

Çözüm: Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned}
I &= \int \arctan x\, dx \\
&= x \arctan x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx \\
&= \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_0^1 \qquad = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

Örnek 27.81.

$$I = \int e^{ax} cos bx\, dx, \qquad (ab \neq 0) \tag{27.46}$$

interalini bulunuz.

Çözüm:

$$u = e^{ax}, du = ae^{ax}dx, dv = \cos bx, dxv = \frac{1}{b}\sin bx$$

konumuyla Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{ax} cos bx\, dx \\
&= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\, dx \\
&= \frac{1}{b}c\sin bx - \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I + C
\end{aligned}$$

Burdan

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}\,\frac{a}{b^2} e^{ax}\,(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

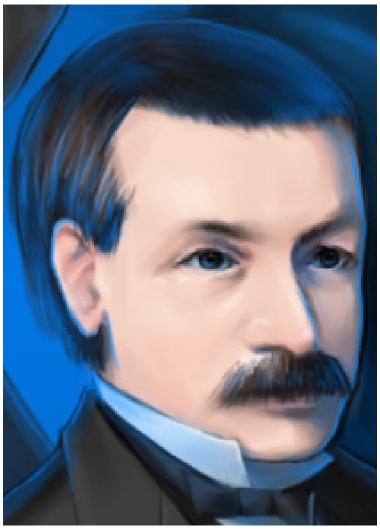
bulunur.

Benzer olarak

$$I = \int e^{ax}\sin bx\,dx, = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

eşitliği elde edilebilir.

Şekil 27.6: Hermann Schubert



Şekil 27.7: Leopold Kronecker

7.13 Polinomların Çarpanlara Ayrılması

Polinomların kökleri uygulamada önemli rol oynar. O nedenle polinomlar işlenirken bu konuya ağırlık verilir. Benzetmek gerekirse, bir polinomun çarpanlarına ayrılması bir sayının asal çarpanlarına ayrılması gibidir. Tabii, sayılarda var olan bütün özelikler polinomlarda olmaz.

Polinomları çarpanlarına ayırma konusu ilk kez 1793 yılında Hermann Schubert tarafından ortaya konulmuş 1882 yılında Leopold Kronecker bulduğu bir algoritma ile konuyu genelleştirmiştir. Bugün polinomu çarpanlara ayırma eylemi bilgisayar cebirinin temel taşlarından birisidir.

Bu kitapta polinomu çarpanlarına ayırma eylemi rasyonel fonksiyonların integralini bulmak için kullanılacaktır. O nedenle, bu kesimde bir $q(x)$ polinomunun çarpanlarına ayrılışını bize gerektiği kadarıyla ele alacağız. Önce iyi bilinen temel bilgileri anımsayalım:

Gerçel katsayılı her $Q(x)$ polinomu doğrusal ve quadratik çarpanlarının çarpımı olarak yazılabilir.

Tanım 27.82. *Katsayıları gerçel olan bir*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-1}x^{m-1} + a_nx^n \tag{27.47}$$

polinomunu düşünelim. Eğer

$$(x-c)^k S(x) \tag{27.48}$$

eşiliğini sağlayan bir $S(x)$ polinomu varsa c sayısı $q(x)$ polinomunun k-katlı bir köküdür.

$k = 1$ ise c sayısı tek katlı kök olur. n-inci dereceden bir polinomum n tane kökü vardır. Burada c sayısı $q(x)$ polinomunun k-katlı kökü ise geri kalan köklerin sayısı $n-k$ tanedir ve onlar $S(x)$ polinomunun kökleri olur. Kökler gerçel ya da karmaşık sayı olabilirler.

Teorem 27.83. *Özdeş iki polinomun aynı dereceli terimlerinin katsayıları birbirlerine eşitttir.*

İspat: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-1}x^{m-1} + a_nx^n$
ve

$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$

polinomları özdeş olsunlar. O zaman farkları 0'a özdeş olmalıdır:
$n > m$ ise

$$\equiv p(x) - q(x) \tag{27.49}$$

$$\equiv (a_0 - b_0) + (a - 1 - b_1)x + \ldots(a_m - b_m)x^m + a_{m+1}x + \ldots + a_nx^n \tag{27.50}$$

olmalıdır. Bunun olabilmesi için

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m, a_{m+1} = 0, \ldots a_n = 0 \tag{27.51}$$

$n < m$ ise benzer düşünce geçerlidir.

Teorem 27.84. $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} + b_mx^m$ *polinomunun* $(x-c)q_1(x)$ *biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve yeterli koşul* c *nin bir kök olması; yani* $q(c) = 0$ *olmasıdır.*

İspat:
$q(x)$ polinomu $x - c$ ile tam bölünebiliyorsa $q(c) = 0$ olacağından,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x) - q(c) \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} + b_mx^m - (\\ &\quad b_0 + b_1c + b_2c^2 + b_3c^3 + \ldots + b_{n-1}c^{m-1} + b_mc^m) \\ &= b_1(x-c) + b_2(x^2-c^2) + b_3(x^3-c^3) + \ldots + b_m(x^m-c^m) \end{aligned} \tag{27.52}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x-c)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + c^{n-1}\right), \qquad (n = 1, 2, \ldots, m) \tag{27.53}$$

dir. (39.19) ve (39.20) bağıntılarından istenen çıkar.

Polinomun bazı kökleri tamsayı olabilir.

Örnek 27.85.

$$q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \tag{27.54}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Baş katsayısı 1 olan bir polinomun tam sayı kökü varsa sabit teriminin bir çarpanıdır. Burada sabit terim 2'dir. 2'nin çarpanları $\pm1, \pm2$ olmak üzere dört tanedir. Bunlar arasında $c_1 = 2$ sayısı $q(c_1) = 0$ eşitliğini sağlar. O halde,

$$q(x) = (x-2)q_1(x) = (x-2)(x^2-1) \tag{27.55}$$

yazılabilir. Tekrar $q_1(x)$ polinomunun köklerini bulmamız gerekiyor. Bu polinom ikinci dereceden olduğu için köklerini formülden bulabiliriz: $c_2 = -1$ $c_3 = +1$ olur. $q(x)$ polinomunun üç kökünü de bulduğumuza göre onu

$$q(x) = (x-2)(x+1)(x-1) \tag{27.56}$$

biçiminde çarpanlarına ayırabiliriz.

Polinomum bazı kökleri irrasyonel sayı olabilir.

Örnek 27.86.

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \tag{27.57}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 6 sayısının çarpanları $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ sayılarıdır. Bunlar arasında $p(c) = 0$ yapan tek sayı $c_1 = 3$ sayısıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)q_1(x)(x-3)(x^2-2) \tag{27.58}$$

olur. Geriye kalan $q_1(x) = (x^2-2)$ polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri $\pm\sqrt{2}$ dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \tag{27.59}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Örnek 27.87.

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda x değişkeninin her terimde olduğu apaçık görünüyor. Öyleyse,

$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$

yazabiliriz.Parantez içindeki polinomun tansayı kökleri varsa 8 sabitinin çarpanları olacağından, $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ sayılarının kök olup olmadıklarını denemeliz. $c = 2$ sayısı için $q_1(2) = 0$ olduğu; yani $c_2 = 2$ sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x-2)q_2(x) = x(x-2)(x^2 - 2x - 4)$$

yazılabilir. Burada geriye kalan $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$ ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. O halde, $q(x)$ polinomu

$$q(x) = x(x-2)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Polinomum bazı kökleri karmaşık sayı olabilir.

Örnek 27.88.

$$q(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: Beşinci dereceden olduğu için bu polinomum beş tane kökü olduğu biliniyor. Ancak üçüncü dereceden büyükler için kökü bulmamızı sağlayan bir formül yoktur. Sabit terimin $\pm1, \pm2, \pm4$ sayılarından $+1$ sayısının kök olduğu denenerek görülebilir. $q(x) = (x+1)q_1(x)$ yazarsak $q_1(x) = (x^2+2)^2$ olduğu ve $q_1(x)$polinomunun gerçel kökünün olmadığı görülür. Geri kalan dört kökün dördü de karmaşık sayıdır.

$$q(x) = (x+1)(x^2+2)^2.$$

Örnek 27.89.

$$q(x) = 8x^4 - 4x^3 + 10x^2$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: Dördüncü dereceden olan bu polinomun 4 tane kökü vardır. $2x^2$ çarpanı ortak olduğu için polinomu,

$$q(x) = 2x^2\left(4x^2 - 2x + 5\right)$$

biçiminde çarpanlara ayırısak, $(4x^2 - 2x + 5)$ çarpanının ikinci dereceden ve gerçel kökü olmadığı görülür. Kökler

$$x_1 = 0.25 + 1.0897247358852i, \quad x_2 = .25 - 1.0897247358852i$$

dir. Öyleyse,

$$q(x) = 2x^2\ (x - .25 + 1.0897247358852i)\,.\,(x - .25 - 1.0897247358852i)$$

olur.

27.14 Basit Kesirlere Ayırma

İki polinomun oranı biçiminde yazılan fonksiyonlara rasyonel fonklsiyon denilir. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinde $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden daha küçükse, rasyonel fonksiyona basit, değilse bileşik kesir denilir.

$Q(x)$ paydasının $(x-a_k)^m$ bir çarpan ve $(x^2+px+q)^r$ bir quadratik çarpan ise rasyonel fonksiyon

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(x-a_k)^k} + \sum_{r=1}^{R} \frac{b_m x + C_m}{(x^2+px+q)^r}$$

biçiminde basit kesirlerine ayrılır. Sonra her basit kesir için kendi sınıfına ait integral yöntemi uygulanaır.

27.15 Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi

Şimdi en basit halden başlayarak rasyonel fonksiyonların integrallenmesini inceleyeceğiz.

Örnek 27.90.

$$I = \int \frac{1}{1-x^2}\, dx \tag{27.60}$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \equiv \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \equiv \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \equiv \frac{(A-B)x+(A+B)}{1-x^2} \\
&\Rightarrow (A-B=0, (A+B)=1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1-x)}\right)
\end{aligned}$$

Artık sağ taraftaki basit kesirlerin integralleri alınabilir:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{1-x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1-x)}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\ln(1+x) - ln(1-x)) + \ln C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|C\frac{(1+x)}{(1-x)}\right|
\end{aligned}$$

Örnek 27.91.

$$I = \int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx \tag{27.61}$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

İntegrali alınacak fonksiyonun payının derecesi paydanın derecesinden büyük olduğu için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^5+1}{x^2-1} = x^3 + x + \frac{x+2}{x^2-1} \tag{27.62}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2-1} &= \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \\
\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \\
&= \frac{A(x+1)}{x-1} + \frac{B(x+1)}{x-1} \Rightarrow \\
&= \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1} \\
&\Rightarrow A = 3/2,\, B = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Bulduğumuz bu deperleri (25.35) eşitliğinde kullanırsak,

$$\frac{x^5+2}{x^2-1} = x^3 + x - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} \tag{27.63}$$

olur. Sağ yandaki terimler integrallenebilir olduğundan

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx \\
&= \int x^3\,dx + \int x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.92.

$$I = \int \frac{3x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Kısmi kesirlerine ayırıp integrale geçilirse,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2+2} + \int \frac{xdx}{(x^2+2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}\,dx \\
&= ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} \\
&= ln|x| - \frac{1}{2}ln(x^2+2) - \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2)} + \frac{1}{4}\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.93.

$$I = \int \frac{6x^3+5x^2+21x+12}{x(x+1)(x^2+4)}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{6x^3+5x^2+21x+12}{x(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$
$$6x^3+5x^2+21x+12 \equiv A(x+1)(x^2+4)+Bx(x^2+4)+(Cx+D)x(x+1)$$
$$\equiv (A+B+C)x^3+(A+D+C)x^2+(4A+4B+D)x+4A$$
$$\Rightarrow A+B+C=6$$
$$A+C+D=5$$
$$4A+4B+D=21$$
$$4A=12$$
$$\Rightarrow A=3, B=2, C=1, D=1$$

Bunları yerlerine koyarsak, integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{x}\,dx+\int\frac{2}{x+1}+\int\frac{x+1}{x^2+4}\,dx \\ &= 3\ln|x|+2ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}Arctan\frac{x}{2}+C \\ &= \ln\left|x^3(x+1)^2\sqrt{x^2+4}\right|+\frac{1}{2}Arctan\frac{x}{2}+C \end{aligned}$$

Örnek 27.94.
$$I=\int\frac{x^5-x^4-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{x^5-x^4-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} &= (x+1)+\frac{-2x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \\ &= (x+1)+\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} \\ &= (x+1)+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int\left((x+1)+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+x+ln(x^2+1)+tan^{-1}x-2ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C \end{aligned}$$

Örnek 27.95.
$$I=\int\frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 2x^2-6x+4 &= 2(x^2-3x)+4 \\ &= 2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}+4-\frac{9}{2}\right) \\ &= 2(u^2-a^2) \qquad \Rightarrow u=x-\frac{3}{2}, \quad a=\frac{1}{2}, \quad du=dx \\ x+1 &= u+\frac{5}{2} \end{aligned}$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u+\frac{5}{2}}{\sqrt{2(u^2-a^2)}}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int 2z^{-\frac{1}{2}}\,dz + C_1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{z} + C_1 \\ &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + C_1 \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}\,ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C_2$$

O halde,

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C \\ &= \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|(x-\frac{3}{2}) + \sqrt{x^2-3x+2}\right| + C \end{aligned}$$

çıkar.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + C_1 \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C_2$$

Örnek 27.96.

$$I = \int \frac{1}{4x^2+4x+2}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{4(x^2+x)+2} \\
&= \int \frac{dx}{4(x^2+x+\frac{1}{4})+(2-\frac{4}{4})} \\
&= \int \frac{du}{4(u^2+1)}, \qquad (u = x+\frac{1}{2})\} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+(\frac{1}{2})^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1/2} arctan \frac{u}{\frac{1}{2}}\right)+C \\
&= \frac{1}{2} arctan(2x+1)+C
\end{aligned}
$$

27.16 Rasonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması

Rasyonel fonksiyon iki polinomun bölümü biçiminde olan fonksiyonlardır:

$$
r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 4 a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 4 b_3 x^3 + \ldots + b_n x^m} \tag{27.64}
$$

bu ifadede $n \geq m$ ise rasyonel fonksiyona bileşik kesir, $m < n$ ise basit kesir denilir. Başka bir deyişle, paydanın derecesi payın derecesinden küçükse rasyonel fonksiyona bileşik kesir, değilse basit kesir denilir. Bu sınıflandırma sayılardaki bileşik ve basit kesir tanımı gibidir.

Bileşik kesir halinde olan rasyonel fonksiyonlar basit kesirlerine ayrılabilir. Bunun için paydaki polinomun paydadaki polinoma bölünmesi yeterlidir. Bu bölme işlemi sonunda,

$$
r(x) = p_1(x) + r_1(x) \tag{27.65}
$$

gibi bir ifade çıkar. Burada, *der* simgesi polinomum derecesini göstermek üzere, $r_1(x)$ bir polinomdur ve derecesi $n-m$ dir. $r_1(x)$;yani

$$
r_1(x) = \frac{p_2(x)}{q(x)} \qquad (der\{p_2\} < der\{q\}) \tag{27.66}
$$

biçiminde rasyonel bir fonsiyondur ve payın derecesi paydanın derecesinden kesinlikle küçüktür.

Bu türlerin integrali için parçalı kesirlere ayırma (partial fraction) yöntemi kullanılır. İntegrallenen rasyonel fonksiyon parçalı kesirlerine ayrılınca her terim bilinen yöntemlerle integrallenebilir hale gelir.

(25.37) biçiminde bir fonksiyonun integrali isteniyorsa, sırasıyla şu eylemler yapılır:

1. $p(x)$ polinomumun derecesi $q(x)$ polinomunkinden büyükse, önce

$$
r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + r_1(x) \tag{27.67}
$$

   bölme işlemi yapılır.

2. Bölme işleminin verdiği $p_1(x)$ polinomu terim terime integrallenebilir.

3. Rasyonel $r_1(x)$ fonksiyonunun $q(x)$ paydası çarpanlarına ayrılır.

4. Her çarpana karşılık gelen basit kesirler bulunur.

5. Bulunan kesirlerin tek tek integralleri alınır.

Rasyonel fonksiyonun parçalı kesirlere ayrılması eylemi polinomların bir konusudur. Ama rasyonel fonksiyonların integralinde sık sık karşılaşacağımız basit kesirlere ayırma eyleminin esaslarını anlatmalıyız.

n-inci dereceden bir polinomun n tane kökü olduğunu biliyoruz. Önceki kesimde her köke karşılık polinomun bir çarpanı olduğunu söylemiştik.

Teorem 27.97. $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 4b_3x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} + b_mx^m$ *polinomunun* $(x-c)q_1(x)$ *biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve yeterli koşul c nin bir kök olması; yani* $q(c) = 0$ *olmasıdır.*

Rasyonel fonksiyonların basit kesirlere ayrılışını gösteren aşağıdaki teoremin ispatı, bu kitapta olmayan bazı teknik bilgilere dayanır. O nedenle teoremi ispatsız olarak ifade edeceğiz:

Teorem 27.98. *Basit kesir biçimindeki rasyonel* $q(x)$ *fonksiyonun paydası*

$$q(x) = a(x-c_1)^{r_1}\ldots(x-c_k)^{r_k}\left((x^2+b_1x+d_1)^{s_1}\ldots(x^2+b_mx+d_m)^{s_m}\right) \tag{27.68}$$

biçiminde ve bu gösterimdeki iki doğrusal ya da quadratik çarpan aynı değil ve indirgenemez ise $q(x)$ *rasyonel fonksiyonu,*

$$q(x) = B_{lin} + B_{quad} \tag{27.69}$$

biçiminde iki blok'un toplamına eşittir. Bu bloklar için aşağıdaki kurallar geçerlidir: Her farklı $(x-c_i)$ *doğrusal çarpanı için,* c_i *k katlı kök ise,*

$$B_{lin} = \frac{A_1}{(x-c_i)} + \frac{A_2}{(x-c_i)^2} + \ldots + \frac{A_{r_i}}{(x-c_i)^{r_i}} \tag{27.70}$$

biçimindeki k terimli bir blok oluşur..

$(x^2+b_ix+d_i)$ *quadratik çarpanı m-katlı bir çarpan ise*

$$B_{quad} = \frac{B_1x+C_1}{(x^2+b_ix+d_i)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+b_ix+d_i)^2} + \ldots + \frac{B_{s_i}x}{(x^2+b_ix+d_i)^{s_i}} \tag{27.71}$$

biçimindeki m öğeli bir blok oluşur.

Bloklardaki A_h, B_s, C_t *sabit katsayıları* $q(x)$ *polinomuna bağlı olarak tek olarak belirlenebilirler.*

(39.101) ve (36.9) ifadelerinde terim sayıları ilgili kökün kaçıncı dereceden katlı kök olduğuna bağlıdır. Örneğin, $r_k = 1$ ise c_1 tek katlı kök olur. Dolayısıyla, B_{lin} blokunun tek öğesi var olur. $\frac{A_1}{(x-c_1)}$ terimi (B_{lin}) blokunun biricik terimi olur. Benzer şekilde, $s_m = 1$ ise (36.9) blokunun biricik terimi $\frac{B_1x+C_1}{(x^2+b_1x+d_1)}$ olur.

İspat:

$q(x)$ polinomu $x-c$ ile tam bölünebiliyorsa $q(c) = 0$ olacağından,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x) - q(c) \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 4b_3x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} + b_mx^m - (\\ &\quad b_0 + b_1c + b_2c^2 4b_3c^3 + \ldots + b_{n-1}c^{m-1} + b_mc^m) \\ &= b_1(x-c) + b_2(x^2-c^2) + b_3(x^3-c^3) + \ldots + b_m(x^m-c^m) \end{aligned} \tag{27.72}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + c^{n-1}, \quad (n = 1, 2, \ldots, m) \tag{27.73}$$

dir. (39.19) ve (39.20) bağıntılarından istenen çıkar.

Örnek 27.99.
$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \tag{27.74}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 6 sayısını çarpanları $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ sayılarıdır. Bunlar arasında $p(c) = 0$ yapan tek sayı $c_1 = 3$ sayısıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)q_1(x)(x-3)(x^2-2) \tag{27.75}$$

olur. Geriye kalan $q_1(x) = (x^2 - 2)$ polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri $\pm\sqrt{2}$ dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \tag{27.76}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Örnek 27.100.
$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x \tag{27.77}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda x dğişkeninin her terimde olduğu apaçık görünüyor. Öyleyse,
$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$
yazabiliriz.Parantez içindeki polinomun tansayı köklei varsa 8 sabitinin çrpanları olacağından, $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ sarılarının kök olup olmadıklarını denemeliz. $c = 2$ sayısı için $q_1(2) = 0$ olduğu; yani $c_2 = 2$ sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x-2)q_2(x) = x(x-2)(x^2 - 2x - 4) \tag{27.78}$$

yazılabilir. Burada geriye kalan $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$ ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. Ohalde, $q(x)$ polinomu

$$q(x) = x(x-2)(x + 14\sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5}) \tag{27.79}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

$$x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4X + 4 \tag{27.80}$$

27.17 Rasyonelleştirme

İntegrali alınacak fonksiyon köklü ifadeler içriyor, ya da integrali bilinen bir tipten değilse, uygun bir değişken değiştirimi ile rasyonel fonksiyon haline getirilir ve ona rasyonel fonksiyon için bilinen integral alma yöntemleri uygulanır.

Örnek 27.101.
$$\int \frac{sqrtx}{1 + \sqrt[3]{x}} \tag{27.81}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: İntegrali alınacak fonsiyon bir kare kök, bir de küp kök içeriyor. her iki köklü ifadeden kurtulmak için $u = \sqrt[3]{x}$, $x = u^6$, $6u^5 du = dx$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
int \frac{sqrtx}{1+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{u^3}{1+u^2}\,du \\
&= \int (6u^6 - 6u^4 + 6u - 6 + \frac{1}{1+u^2} \qquad \text{(payı paydaya böl)} \\
&= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + \tan^{-1} u + C \\
&= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1} x^{\frac{1}{6}} + C
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 27.102.

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx \tag{27.82}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$u = 1 + e^x$, $ln(u-1) = x$, $\frac{1}{u-1}\,du = dx$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+e^x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{u}\frac{1}{u-1}\right) du \\
&= \int \frac{1}{1+e^x}\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u-1}\right) du \\
&= ln|u-1| - ln|u| + lnC \\
&= C.ln\left|\frac{u-1}{u}\right| \\
&= C.ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| \\
&= C.ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)
\end{aligned}
$$

27.18 Köklü İfadelerin İntegrali

Köklü ifadelerin integrali için kullanılan geçerli yönten, integrandı kökten kurtaracak uygun bir değişken değiştirimi yapmaktır. Dolayısıyla bu kesimi (25.4) kesimi içinde görmek daha doğrudur. Birkaç örnek söylediğimiz kanıtlayacaktır.

Örnek 27.103.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\pi + 2x}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Burada zorluğu yaratan terim kareköklü terimdir. Karekökten kurtulmak için uygun bir değişken değiştirimi bulmalıyız. Deneyerek $u^2 = \pi + 2x$, $2udu = 2dx \Rightarrow dx = udu$ konumunun işe yaradığını görebiliriz:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\pi+2x}}\,dx &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}}\\ &= \int \frac{udu}{u}\\ &= \int du\\ &= u + C\\ &= \sqrt{\pi+2x} + C\end{aligned}$$

Örnek 27.104.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekökten kurtulmak için, $u^2 = 3x-1$, $x = \frac{1}{3}(u^2+1)$, $2udu = dx$, $dx = \frac{2}{3}udu$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx &= \frac{2}{9}\int \frac{(u^2+1)}{u}udu\\ &= \frac{2}{9}\int udu + \frac{2}{9}\int \frac{du}{u}\\ &= \frac{1}{9}u^2 + \frac{2}{9}ln|u| + C\\ &= \frac{1}{9}(3x-1) + \frac{2}{9}ln|\sqrt{3x-1}| + C\end{aligned}$$

Örnek 27.105.

$$\int \left(x^2-4x+4\right)^{-\frac{5}{3}}\,dx \tag{27.83}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Uygun bir değişken değiştirimi ile küp kökten kurtulmalıyız. Bunun için küp köklü ifadenin içinin $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ olduğunu görelim. Sonra

$u^3 = (x-2)$, $3u^2du = dx$, $(x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{\frac{10}{3}}$

konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \left(x^2-4x+4\right)^{-\frac{5}{3}}\,dx &= \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2-4x+4})^5}\,dx\\ &= \int \frac{3u^2}{u^{10}}\,du\\ &= -\frac{3}{7}u^{-7} + C\\ &= -\frac{3}{7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C\end{aligned}$$

Örnek 27.106.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \tag{27.84}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u^2 = x, 2udu = dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx &= \int \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}}\,du\\ &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du\\ &= 2Arcsinu + C\\ &= 2Arcsin\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 27.107.

$$I = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$\begin{aligned}2x^2-6x+4 = 2(x^2-3x)+4 &= 2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+4-\frac{9}{2}\\ &= 2(u^2-a^2)\\ u &= x-\frac{3}{2}\\ a &= \frac{1}{2}\\ du &= dx\\ x+1 &= u+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{(u+\frac{5}{2})du}{\sqrt{2(u^2-a^2)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int z^{-1/2}dz &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{2}z^{1/2} + C_1\\ &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + C_1\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C_2$$

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2\\ &= \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}ln\left|x+\frac{-3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right| + C\end{aligned}$$

Örnek 27.108.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = a\ \cos^{u} + b\ \sin^2 u$$
$$dx = (-2a\cos u.\sin u + 2b\sin u\cos u)\,du$$
$$2\sin u\cos u(b-a)\,du$$
$$= (b-a)\sin 2u\,du(x-a \qquad = a(\cos^2 u - 1) + b\sin^2 u = (b-a)\sin^2 u$$
$$(b-x) = b((1-\sin^2 u) - a\cos^2 u = (b-a)\cos^2 u$$
$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin u\cos u$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx \\ &= \int \frac{(b-a)\sin 2u}{(b-a)\sin u\cos u}\,du \\ &= 2\int du \\ &= 2u + C \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\frac{x-a}{b-x} = \tan^2 u \Rightarrow u = \arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

değeri kullanılarak,

$$I = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C$$

bulunur.

Örnek 27.109.

$$I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = 2\tan t, dx = 2(1+\tan^2 t)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{(\pi/2)} \frac{1}{\sqrt{4(1+\tan^2 t)}}(1+\tan^2 t)2dt \\ &= \int \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\frac{2}{\cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t(\sec t + \tan t)}{(\sec t + \tan t)}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t\tan t + \sec^2 t}{(sec t + \tan t)}\,dt \\ &= \int \frac{du}{u} \qquad (u = \sec t + \tan t) \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|sec t + \tan t| + C \\ &= \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

Örnek 27.110.
$$I=\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x=\sqrt{3}\tan t,dx=\sqrt{3}\sec^2 t\,dt$$
konumuyla,
$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\,dx\\&=\int\frac{\sqrt{3}\sec^2 t}{3\tan^2 t\sqrt{3}\sec t}\,dt\\&=\frac{1}{3}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt\\&=\frac{1}{3}\int(\sin^2 t)d(\sin t)\\&=-\frac{1}{3}\frac{1}{\sin t}+C\end{aligned}$$

Örnek 27.111.
$$I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x=\frac{2}{\cos t}$$
konumuyla,
$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx\\&=\int\frac{\frac{2\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{2}{\cos t}\cdot\frac{2\sin t}{\cos t}}\,dt\\&=\frac{1}{2}\int dt\\&=\frac{1}{3}t+C\\&=\frac{1}{3}\arccos(\frac{2}{x})+C\end{aligned}$$
çıkar.

Örnek 27.112.
$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{\sqrt{\pi+2x}}\,dx\\&=\int\frac{udu}{\sqrt{u^2}}\\&=\int\frac{udu}{u}\qquad(u^2=\pi+2x,2udu=2dx,dx=udu)\\&=u+C\\&=\sqrt{\pi+2x}+C\end{aligned}$$

Örnek 27.113.

$$\int (1-2x)^9 dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^9(-2dx) = -\frac{1}{20}(1-2x)^{10} + C$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx \\
&= \frac{2}{9}\int \frac{(u^2+1)}{u^2}\,du \qquad (u^2 = 3x-1) \\
&= \frac{2}{3}\int u du + \frac{2}{9}\int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{3}(3x-1) + \ln\sqrt{3x-1} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.114.

$$I = \int (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$(x^2-4x+4) = (x-2)^2,\; u^3 = x-2,\; 3u^2du = dx,\; (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{\frac{-10}{3}}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}}\,dx \\
&= \int \frac{3u^2}{u^{10}}\,du \\
&= -\frac{3}{7}u^{-7} \\
&= -\frac{3}{7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.115.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u^2 = x$ konumuyla,,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx \\
&= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \int \arcsin u + C \\
&= 2\arcsin\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} + C \tag{27.85}$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C \tag{27.86}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{-3x}-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|e^{3x}-1| + C \tag{27.87}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}(1+e^{-\sqrt{x}})}\,dx = 2\int \frac{du}{1+e^{-u}} = 2\int \frac{e\hat{u}du}{1+e^{u}} = \ln(e\hat{u}+1)+C \qquad (27.88)$$

$$\int \frac{2^x}{4^x+1}\,dx = \int \frac{1}{\ln 2}\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \frac{\sinh^{-1}(2^x)}{\ln 2} = \frac{\ln(2^x+\sqrt{4^x+1}}{\ln 2}+C$$

$$\int \frac{\sinh\sqrt{x}.\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sinh^2\sqrt{x}+C \qquad (27.89)$$

27.19 *İndirgenme Yöntemleri*

İntgral eylemindeki indigeme formülleri yinelge (recurrence) formüllerinin özel halidir. Yinelge, bir eylemin art arda tekrarlanarak en yalın (çözülebilir) biçimine dönüştürülmesidir. Bunu integral için bir örnekle açıklayabiliriz. Örneğin,

Örnek 27.116.

$$\int cos^n x\,dx \qquad (27.90)$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. O durumda kuvveti düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\cos x)^n\,dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1}.\cos x\,dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1}.d(\sin x) \end{aligned}$$

Kısmi integrasyon işlemleriyle,

$$\begin{aligned} \int \cos^n x\,dx &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - \int \sin x.d\left((\cos x)^{n-1}\right) \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int \sin x.(\cos x)^{n-2}.\sin x\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2}.(\sin x)^2\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2}.(1-(\cos x)^2\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2}.dx - (n-1)\int (\cos x)^n\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

çıkar. Buradan I_n çözülürse

$$\begin{aligned} I_n + (n-1)I_n &= (\cos x)^{n-1}.\sin x + (n-1)I_{(n-2)} \\ nI_n &= (\cos x)^{n-1}.\sin x + (n-1)I(n-2) \\ I_n &= \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}.\sin x + \frac{n-1}{n}I_{(n-2)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\int (\cos x)^n\,dx = \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}.\sin x + \frac{n-1}{n}\int (\cos x)^{n-2}\,dx \qquad (27.91)$$

indirgeme formülü bulunur. Benzer şekilde,

$$\int (\sin x)^n\,dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}.\cos x + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2}\,dx \qquad (27.92)$$

Örnek 27.117.

$$\int \cos^5 x\, dx$$

integralini bulmak isteyelim. $n = 5$ olduğundan

$$\begin{aligned}
n = 5 &\Longrightarrow I_5 = \int (\cos x)^5\, dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3 \\
n = 3 &\Longrightarrow I_3 = \frac{1}{3}(\cos x)^2.\sin x + \frac{2}{3} I_1 \\
n = 1 &\Longrightarrow I_1 = \int \cos x\, dx = \sin x + C_1
\end{aligned}$$

Şimdi yürünülen yola geri dönülürse,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \cos x\, dx = \sin x + C_1 \\
I_3 &= \frac{1}{3}(\cos x)^2.\sin x + \frac{2}{3} sin x + C_2 \qquad (C_2 = \frac{2}{3} C_1) \\
I_5 &= \frac{1}{5}(\cos x)^4.\sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}(\cos x)^2.\sin x + \frac{2}{3}\sin x\right) + C
\end{aligned}$$

Örnek 27.118.

$$I_n = \int x^n e^{\alpha x}\, dx \tag{27.93}$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. x^n çarpanının kuvvetini düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int x^n e^{\alpha x}\, dx \\
&= \frac{1}{n+1}\int e^{\alpha x} d(x^{n+1}), \qquad \left(x^n dx = \frac{d(x^{n+1})}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int e^{\alpha x} d(x^{n+1}) &= x^{n+1} e^{\alpha x} - \int x^{n+1} d(e^{\alpha x}) \\
&= x^{n+1} e^{\alpha x} - \alpha \int x^{n+1} e^{\alpha x}\, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+1) I_n &= x^{n+1} e^{\alpha x} - \alpha I_{n-1} \\
I_n &= \frac{1}{\alpha}\left(x^n e^{\alpha x} - n I_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

çıkar. Buradan

$$\int x^n e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}\left(x^n e^{\alpha x} - n\int x^{n-1} e^{\alpha x}\right) \tag{27.94}$$

indirgeme formülü bulunur.

27.20 *Bazı İndirgeme Formülleri*

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx\\
\Longrightarrow I_n &= \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a(2n+1)} - \frac{2nb}{a(2n+1)} I_{n-1}\\
I_n &= \int \frac{1}{x^n\sqrt{(ax+b)}}\,dx\\
\Longrightarrow I_n &= -\frac{\sqrt{(n-1)bx^{n-1}}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2b(n-1)} I_{n-1}\\
In,m &= \int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n}\\
\Longrightarrow a^2 In,m &= a^2 Im,n + Im-2,n\\
I_n &= \int x^n \sin(ax)\,dx\\
\Rightarrow a^2 I_n &= -ax^n\cos(ax) + nx^{n-1}\sin(ax) - n(n-1)I_{n-2}\\
J_n &= \int x^n \cos(ax)\,dx\\
\Rightarrow a^2 J_n &= ax^n\sin(ax) + nx^{n-1}\cos(ax) - n(n-1)J_{n-2}\\
I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\\
\Rightarrow I_n &= \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}
\end{aligned}
$$

Örnek 27.119. *$a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda*

$$I_n = \int x^a(\ln x)^n\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}(\ln x)^n - \frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx \qquad (27.95)$$

indirgemr formülünü ispatlayınız.

$$u = (\ln x)^n,\ du = n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx, dv = x^a\,dx,\ v = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$$

konumuyla,

$$I_n = \frac{1}{a+1}x^{a+1} - \frac{n}{a+1}\int x^{a+1}(\ln x)^{n-1}\,dx \quad \square$$

Örnek 27.120. *$a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda*

$$I_n = \int x^{-1}(\ln x)^n\,dx = \int (\ln x)^n\,d(\ln x) = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C \qquad (27.96)$$

dir.

$$I_n = \int \sin^n(ax)\cos(ax)\,dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C \qquad (27.97)$$

dir.

$$I_n = \int \cot(ax)\,dx = \ln|\sin(ax)| + C \qquad (27.98)$$

dir.

$$\begin{aligned}I &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^2 x . \sec^2 x d - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}I &= \int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos x}\, dx \\ &= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

dir.

$$I = \int \sec(x)\, dx = \ln|\sec(x) + \tan x| + C$$

dir.

$$I = \int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \int \cos(ax)\, d(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

dir.

27.21 Bağlantılı Oranlar

1. Bir parçacık $2 = x + 2y$ doğrusu boyunca pozitif yönde gidiyor.

   (a) x koordinatının değişimi saniyede 4 birim ise y koordinatını değişimi nedir?

   (b) y koordinatının değişimi saniyede -2 birim ise x koordinatını değişimi nedir?

   Çözüm:

   (a):

   $$x + 2y = 2 \Rightarrow x' + 2y' = 0 \Rightarrow 4 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -2 \text{ br/sn}$$

   olur. (b):

   $$x + 2y = 2 \Rightarrow x' + 2(-2) = 0 \Rightarrow x' - 4 = 0 \Rightarrow x' = 4 \text{ br/sn}$$

   olur.

2. Bir parçacık $x^2 + y^2 = 25$ eğrisi boyunca hareket ediyor. $(3,4)$ noktasından geçerken y koordinatı saniyede 2 birim azalıyor. x koordinatının değişimi nedir?

   Çözüm: $x = 3$ iken $y = 4$ dür.

   $$2xx' + 2yy' = 0 \Rightarrow 3x' + 4(-2) = 0 \Rightarrow x' = \frac{8}{3}$$

   olur. Demek ki x koordinatının değişimi $\frac{8}{3}$ br/sn dir.

3. Bir kamera bir eşkener üçgenin oranlarını koruyarak küçültüyor. Belirli bir anda bir kenarın küçülmesi k cm/sn dir. Üçgenin alanının değişim oranı nedir?

   Çözüm:

   Alan formülünü yazalım. Eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu x ise yüksekliği $h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}4}{x}$ olacaktır. Öyleyse alan

$$A = \frac{1}{2}hx = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$
$$A' = \frac{\sqrt{3}}{4}2xx' = \frac{\sqrt{3}}{2}xk\; cm^2/\text{dk}$$

   olur.

4. Özel Görelilik kuramına dingin haldeyken kütlesi m olan bir cismin hızı v ise, ışık hızı c olmak ğüzere, cismin uzaydaki hızı

$$m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

   dir. Cismin hızı ışık hızının yarısına eşit olduğunda, hızının değişimi saniyede $0.01c$ ise kütlesinin değişimi nedir? [Görelilik kuramına göre cismin kütlesi hızına bağlı olarak değişir.]

   Çözüm: Cismin hareket halindeki kütlesine M diyelim.

$$M = m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$
$$M' = m\frac{vv'}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

   olur.

5. Kenar uzunlukları x ve y olan dikdörtgenin kenarları, sırasıyla, u ve v oranında değişiyor. Dikdörtgenin alanının değişim oranını bulunuz.

   Çözüm:

   Dikdörtgenin alanı $A = xy$ dir. t anındaki değişim

$$\frac{dA}{dt} = x'y + xy' = uy + vx$$

   olur.

6. İki bisiklet yarışçısından birisi (G) güneyden kuzeye doğru bitim noktasına (finish F), ötekisi (D) doğudan batıya doğru aynı bitim noktasına (F) doğru yol alıyorlar. G yarışçısının hızı 13 km/saat'dir. İki yarışçının bitim noktasına uzaklıkları eşit olduğu anda, aralarındaki uzaklık 16 km.dir. Aralarındaki uzaklık 17km/saat hızla azalıyor. Yarışı hangisi kazanacaktır?

   Çözüm: G yarışçısının bitim noktasına uzaklığı x, D yarışçısının y olsun. Aralarındaki uzaklık bir dik üçgenin hipotenüsüdür ve $d^2 = x^2 + y^2$ dir. Uzaklığın türevini alırsak, $dd' = xx' + yy'$ dür. $x = y$ olduğunda $d = 16$ veriliyor. O anda uzaklık formülünden $x = y = \frac{16}{\sqrt{2}}$ ve türev formülünden $y' = 13 - 17\sqrt{2} \approx -11 km/saat$ bulunur. $y' < x'$ olur. O halde G yarışçısı daha hızlıdır ve yarışı kazanacaktır.

28 Belirsiz İntegral

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihsiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

28.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri

Temel Formüller: Aşağıdki formüllerde u = u(x) fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin dve sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

1. $\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{u} \, du = ln|u| + C,$
3. $\int u dv = uv - \int v du$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
4. $\int \frac{1}{au+b} \, du = \frac{1}{a} ln|au+b| + C$

28.1 Değişken Değiştirme

Belirsiz integral verildiği biçemde bilinen integral formüllerinden hiç birisine benzemiyorsa, bazen uygun bir değişken değişimi ile bilinen formüllerden birisine dönüştürülebilir. Bu eylemin genel yöntemi şöyledir: $x = g(t)$ konumu yapılırsa, $dx = g'(t)dt$ olacağı düşünülürse,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \tag{28.1}$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı bilinen integral formüllerinden birisine benziyorsa, eşitliğin sağ yanı hesaplanabilir. Sonra asıl x değişkenine dönmek için $t = g^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu kullanmak gerekir. Dikkat edilirse, bu sonuç zincir theoremına benziyor.

(29.7) formülü ile belirli integral değerleri de bulunabilir:

Teorem 28.1. *$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, $g(t)$ fonksiyonu $\alpha \le g(t) \le \beta$ için sürekli ve $g'(t)$ türevi de sürekli ise $a = g(\alpha)$ ve $b = g(\beta)$ ise ya da buna denk olarak $\alpha = g^{-1}(a)$ ve $\beta = g^{-1}(b)$ ise,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(g(t))g'(t)dt \tag{28.2}$$

olur.

Belirli integral için var olan theoremlar, Teorem **??** ve Teorem 29.7 yardımıyla belirsiz integrallere kolayca uygulanabilir.

Aşağıdakiler değişken değiştirimini gösteren örneklerdir.

Örnek 28.2.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}, \qquad (t = x^2+1,\ \ du = 2xdx)\\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\
&= \ln\sqrt{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.3.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin(2\ln x)}{x}dx &= \frac{1}{2}\int \sin t dt, \qquad (t = 2\ln x,\ \ dt = \frac{2}{x}dx,\ \ dx = \frac{x}{2}dt)\\
&= -\frac{1}{2}\cos t + C\\
&= -\frac{1}{2}\cos(2\ln x) + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.4.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{e^x+1}\, e^x dx &= \int t^{1/2}dt, \qquad (t = e^x+1,\ \ dt = e^x dx,\ \ dx = e^{-x}dt)\\
&= \frac{2}{3}t^{3/2} + C\\
&= \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx &= \int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx\\
&= \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}dx\\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad [t = e^-x,\quad dt = -e^{-x}dx]\\
&= -\sin^{-1} t + C\\
&= -\sin^{-1}(e^{-x}) + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.6.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5+4x+x^2}\,dx &= \int \frac{dx}{1+(x+2)^2}\,dx\\ &= \int \frac{du}{1+u^2}\,du, \qquad [u=(x+2), \quad du=dx]\\ &= \tan^{-1} u + C\\ &= \tan^{-1}(x+2)+C\end{aligned}$$

Örnek 28.7.

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int_1^2 \sin t\,dt, \qquad \left[t=\sqrt{x+1}, \quad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}\right]\\ &= 2\int_1^2 \sin t\,dt, \qquad [x=0 \Rightarrow t=1, \quad x=3 \Rightarrow t=2]\\ &= -2\cos u|_1^2\\ &= 2(cos 1-\cos 2)\end{aligned}$$

28.2 Trigonometrik İntegraller

Örnek 28.8.

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx, \qquad (t=\cos x, \;\; dt=-\sin x\,dx)\\ &= -\int \frac{dt}{t}+C\\ &= -\ln|t|+C\\ &= -\ln|\cos x|+C\\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|+C\\ &= \ln|sec x|+C\end{aligned}$$

Örnek 28.9.

$$\begin{aligned}\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx, \qquad (t=\sin x, \;\; dt=\cos x\,dx)\\ &= \int \frac{dt}{t}+C\\ &= \ln|t|+C\\ &= \ln|\sin x|+C\end{aligned}$$

Örnek 28.10.

$t = (\sec x + \tan x)$, $dt = \sec x \tan x + \sec^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx, \\ &= \int \frac{sec^2 x + \sec x \tan x + sec^2 x}{sec x + \tan x} dx + C \\ &= \int \frac{dt}{t} \qquad = \ln|t| + C \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.11.

$t = (\csc x + \cot x)$, $dt = -(\csc x \cot x + \csc^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx \\ &= \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} + C \\ &= \int -\frac{dt}{t} \\ &= -\ln|t| + C \\ &= -\ln|\csc x + \cot x| + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.12.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \sin^m x.\cos^n x dx &= \int \sin^m x(\cos^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int \sin^m x(1 - \sin^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int (t^n(1-t^2)^k dt + C\end{aligned}$$

çıkar. $(1-t^2)^k$ binoma göre açılabilir ve sonuç t ye göre bir polinom olur. Polinom terim terime integrallenebilir. Sonra istenirse $\sin x$'e dönüşüm yapılabilir. Bunu bir örnekle açıklamak daha kolay olacaktır.

Örnek 28.13.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x.\cos^3 x dx &= \int \sin^2 x(\cos^2 x) \cos x dx \\ &= \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x) \cos x dx, \qquad (t = \sin x,\ dt = \cos x dx) \\ &= \int (t^2 - t^4) dt + C \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C\end{aligned}$$

Örnek 28.14.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x.\cos^8 x dx &= \int \sin^2 x(\cos^8 x)\sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^8 x \sin x dx, \qquad (t=\cos x,\ \ dt=-\sin x dx) \\
&= \int (1-t^2)t^8 dt + C \\
&= \int (t^8 - t^{10}) dt \\
&= \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{11}t^{11} + C \\
&= \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.15.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx, \qquad [\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C \\
&= \frac{1}{2}(x - \sin x.\cos x) + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.16.

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx, \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x)dx, \qquad [\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

28.3 Ters Trigonometrik Konumlar

Çok kullanışlı bazı ters trigonometrik konumlar (değişken değiştirimi),

$$x = a\sin\theta, \quad x = a\tan\theta, \quad x = a\sec\theta$$

fonksiyonları ile yapılır. Bunların karşıt fonksiyonları

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

dır.

Teorem 28.17.

İntegrali alınacak ifade $\sqrt{a^2-x^2}$, $(a>0)$ terimi içeriyorsa, $x = a\sin\theta$ ya da ona denk olarak $\theta = \sin^{-1}(\frac{x}{a})$ konumu yapılır.

Örnek 28.18.

a yarıçaplı bir disk içinde $b < a$ olmak üzere $[b, a]$ aralığına düşen daire kesmesinin A alanını bulunuz.

Çözüm: dairede simetriyi kullanırsak, sözkonusu alan I.bölgedeki alanın iki katı olacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A = \int_b^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_b^a (a^2 \cos\theta) d\theta, \qquad [x = a\sin\theta,\ dx = a\cos\theta d\theta] \\ &= a^2(\theta + \sin\theta.\cos\theta)\Big|_{x=b}^{x=a} \\ &= a^2\left(\sin^{-1}(\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}\right)\Bigg|_{x=b}^{x=a} \\ &= \frac{pi}{2}a^2 - a^2 \sin^{-1}(\frac{b}{a}) - b\sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.19.

$$\begin{aligned} A = \int \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}} dx &= \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta} d\theta, \qquad [x = 3\tan\theta,\ dx = 3\sec^2\theta d\theta] \\ &= \int \sec\theta d\theta \\ &= \ln|sec\theta + \tan\theta| + C \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{9 + x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C \\ &= \ln\left(\sqrt{9 + x^2} + x\right) + C_1, \qquad [C_1 = C - \ln 2] \end{aligned}$$

çıkar.

28.4 Çözümlü Problemler

1.
$$\int dx = x + C$$

2.
$$\int k\, dx = kx + C$$

3.
$$\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

4.
$$\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

5.
$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

6.
$$\int xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

7.
$$\int x^2(1-x^3)^5\, dx = -\frac{1}{18}x^3(x^3-2)(x^6-3x^3+3)(x^6-x^3+1)+C$$

8.
$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\, dx = xsinh^{-1}(x)-\sqrt{x^2+1}+C$$

9.
$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x^2-\ln(x^2+1)\right)+C$$

10.
$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx = \frac{e^x}{x+1}+C$$

11.
$$\int xe^{-x}\, dx = -e^{-x}(x+1)+C$$

12.
$$\int x(x-1)^6\, dx = \frac{1}{8}x^8-\frac{6}{7}x^7+\frac{5}{2}x^6-4x^5+\frac{15}{4}x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^2+C$$

13.
$$\int \frac{1}{5x+3}\, dx = \frac{1}{5}\ln(5x+3)+C$$

14.
$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\, dx$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$t=\sqrt{x}$ değişken değiştirimi yapılırsa

$$\begin{aligned} t=\sqrt{x} &= \\ dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt \\ x &= t^2 \Rightarrow x+1 = t^2+1 \\ x &= 4 \mapsto t=2 \\ x &= 9 \mapsto t=3 \end{aligned} \tag{28.3}$$

değişken değiştirimi yapılınca,

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\, dx &= \int_2^3 \frac{t^2+1}{t^2+2t-3} \\ &= \int_2^3 \frac{2t^3+2t}{t^2+2t-3}dt \\ &= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{16t-12}{(t-1)(t+3)}\right)dt \\ &= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{1}{t-1}+\frac{15}{t+3}\right)dt \\ &= t^2-4t+\ln|t-1|+15\ln|t+3||_2^3 \\ &= [9-12+\ln 2+15\ln 6]-[4-8+0+15\ln 5] \\ &= \ln 2+15\ln 6+15\ln 3-15\ln 5+1 \\ &= \ln 2+15\ln 6-15\ln 5+1 \end{aligned}$$

İstenirse, 5. eşitlikten sonra t değpişkeninden tekrar x değişkenine dönüşüm yapılabilir

$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx = x-4\sqrt{x}+\ln|\sqrt{x}+3||_4^9$$
$$= \ln 2 + 15\ln 6 - 15\ln 5 + 1$$

bulunur.

15.
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu problemi çözmek için önce (29.10) eşitsizliğinin varlığını göreceğiz.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx \le \lim_{n\to\infty}\lim\int_0^{2\pi} \frac{1}{x^2+n^2} \qquad = 0 \tag{28.4}$$

Sonra Teorem **??**-10.'yu kullanacağız:

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\,dx \tag{28.5}$$
$$\le \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2}\,dx \tag{28.6}$$
$$= \frac{2\pi}{n^2} \tag{28.7}$$

Bu eşitsizliklerden limite geçersek,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx \le \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^2} = 0$$

çıkar.

16.
$$\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+3x-5)d(x^2+3x-5)$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2+3x-5)+C$$

17.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\ dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}\ dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x^2-x)}}\ dx \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\ dx, \quad t=(x-\frac{1}{2}) \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-t^2}}\ dt \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{t}{5/2}\right)+e \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right)+e
\end{aligned}$$

18.

$$\int_0^1 x\ln(x+3)\ dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$t=\ln(x+3)$ konumu yapılırsa $dv = x\ dx,\ \ dt=\frac{dx}{x+3},\ \ v=\frac{x^2}{2}$ olur. Bunlar kısmi integral formülünde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int x\ln(x+3)\ dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+3}\ dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)\ dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-3x+9\ln(x+3)\right)+C
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 x\ln(x+3)\ dx = \frac{5}{4}-\ln 4+\frac{9}{2}\ln 3$$

bulunur.

19.

$$\int e^{x/2}\sin(ax)\ dx = \frac{1}{(a^2+\frac{1}{4})}\ e^{x/2}\left(\frac{\sin(ax)}{2}-a\cos(ax)\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

20.

$$\int \frac{1}{(3\cos x+5)}\ dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{2}\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

21.

$$\int e^x\sin x\ dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

22.
$$\int x\sin x\,dx = \sin x x\cos x + C$$

23.
$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x} + C$$

24.
$$\int \csc(3x)\sec(3x)\,dx = \frac{1}{3}\left(\ln(sin(3x)) - \ln(\cos(3x))\right) + C$$

25.
$$\int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{3}\ln\left(x+1\right) + \frac{tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

26.
$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx = -2\sqrt{4-x} + C$$

27.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = -\frac{2x}{\sqrt{x^3}} + C$$

28.
$$\int 2\sin x\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

29.
$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}\,dx = \tan^{-1}(e^x)} + C$$

Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \frac{1}{(au+b)^2}\,du = -\frac{1}{u+a} + C, \quad (au+b \neq 0)$
2. $\int (u+b)^n\,du = \frac{1}{n+1}(u+a)^{n+1} + C,$
3. $\int u(u+a)^n\,du = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(u+a)^{n+1}\left((n+1)u - a\right) + C,$
4. $\int \frac{1}{1+u^2}\,du = tan^{-1}u + C$
5. $\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}tan^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\frac{1}{a}cot^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
6. $\int \frac{1}{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
7. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}}tan^{-1}(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}) + C$
8. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}tan^{-1}\frac{ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

Köklü İfadelerin İntegralleri:

1. $\int \sqrt{x-a}\,dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} + C$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x\pm a}}\,dx = 2\sqrt{x\pm a} + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a-x}}\,dx = -2\sqrt{a-x} + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\cos^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C$

7. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}\, du = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+\sqrt{a^2 \pm u^2}} \right| + C$

8. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, dx = \frac{1}{a} \cos^{-1}(\frac{u}{a}) = \frac{1}{a} \sec^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

9. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$

10. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$
2. $\int \cos u\, du = \sin u + C$
3. $\int \tan u\, du = \ln|\sec u| + C = \ln|\cos u| + C$
4. $\int \cot u\, du = \ln|\sin u| + C$
5. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C = \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$
6. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$
7. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$
8. $\int \csc u \tan u\, du = \sec u + C$
9. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

Hiperbolik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sinh u\, du = \cosh u + C$
2. $\int \cosh u\, du = \sin u + C$
3. $\int \tanh u\, du = \ln|\cosh u| + C$
4. $\int \coth u\, du = \ln|\sinh u| + C$
5. $\int sech(u)\, du = \tanh^{-1}(\sinh u) + C$
6. $\int csch(u)\, du = -\coth^{-1}(\cosh u) + C$
7. $\int sech^2(u)\, du = \tanh u + C$
8. $\int csch^2(u)\, du = -\coth u + C$
9. $\int sech(u) \tanh u\, du = -sech(u) + C$
10. $\int csch(u) \coth u\, du = -csch(u) + C$

Üstel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int e^{ku}\, du = \frac{1}{k} e^{ku} + C$
2. $\int a^u\, du = \frac{1}{\ln a} a^u + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
3. $\int u a^{ku}\, du = \frac{1}{k \ln a} a^{ku} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
4. $\int u^2 a^{ku}\, du = a^{ku} \left(\frac{u^2}{k} - \frac{2u}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right) + C$
5. $\int \frac{e^{kx}}{x}\, dx = \ln u + \sum_{n=1}^{infty} \frac{(kx)^n}{n.n!}$

6. $\int e^{au}\sin bu\ du = \frac{e^{au}(a\sin bu - b\cos bu}{)} a^2+b^2+C$

7. $\int e^{au}\cos bu\ du = \frac{e^{au}(a\cos bu - b\sin bu)}{a^2+b^2}+C$

Logaritmik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \ln(kx)\ dx = x\ln(kx) - x + C$

2. $\int \ln(ax+b)\ dx = x\ln(ax+b) - x + \frac{b}{a}\ln(ax+b)+C$

3. $\int (\ln x)^2\ dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

4. $\int (\ln(kx))^n\ dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln(kx))^{n-1}\ dx + C$

5. $\int \frac{1}{\ln x}\ dx = \ln|\ln x| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n.n!}+C$

6. $\int x^m.\ln x\ dx = x^{m+1}\left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) \qquad (m\neq 1)$

7. $\int \frac{1}{x[\ln(x)]^n}\ dx = \frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n\neq 1)$

8. $\int \ln(x^2+a^2)\ dx = x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2a\tan^{-1}(\frac{x}{a})+C$

9. $\int \sin(\ln x)\ dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))+C$

10. $\int \cos(\ln x)\ dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))+C$

28.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri

28.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse

$y=\ln u \Longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln|u(x)|+C$$

yazabiliriz. Bazen uygun değişken değiştirimi ile integrali alınacak fonksiyon bu biçeme sokulabilir.

Örnekler:

1. $y=\ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$$

yazabiliriz.

2. İntegrali alınacak fonksiyon $\frac{1}{x-a}$ biçiminde ise, onun $\ln|x-a|+C$ foksiyonunun türevi olduğunu biliyoruz.

$$\int \frac{1}{x-2}dx \tag{28.8}$$

integralini hesaplamak için $w=x-2,\ dw=dx$ konumu yapılısa,

$$\int \frac{1}{x-2}dx = \int \frac{1}{w}dw = \ln|w|+C = \ln|x-2|+C$$

bulunur.

3. Paydanın türevi paya eşitse, bir değişken değiştirimi ifadeyi $\frac{dw}{u}$ biçimine dönüştürür.

$$\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr$$

integralini hesaplamak için

$$w = r^3-3r^2+1, \qquad dw = (3r^2-6r)dr = 3(r^2-2r)dr$$

konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{w}dw \\ &= \frac{1}{3}\ln|w|+C \\ &= \frac{1}{3}\ln|r^3-3r^2+1|+C\end{aligned}$$

bulunur.

4. Çoğunlukla payda'nın türevi paya eşit olmaz. Bu durumlarda da değişken değiştirimi bazen işe yarayabilir.

$$\int \frac{s+2}{s+3}ds$$

integralini hesaplamak için $w = s-3, \quad dw = ds$ konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{s+2}{s+3}ds = \int \frac{w+5}{w}dw &= \int \left(1+\frac{5}{w}\right)dw \\ &= w+5\ln|w|+C \\ &= s-3+5\ln|s-3|+C\end{aligned}$$

bulunur.

28.5.2 *Basit Kesirlere ayırma*

Teorem 28.20. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *rasyonel fonksiyonu için, payın derecesi paydadınkinden küçük ve paydanın baş katsayısı 1 olsun. Payda*

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

gibi doğrusal çarpanlarına ayrılabiliyorsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_1}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_1}{x-a_n} \tag{28.9}$$

biçeminde yazılabilir.

Bu teoremin formal ispatını vermeye gerek kalmadan, integral hesabında gerekli olacağı için $A_1, A_2, \ldots, A_n$ katsayılarının hesaplanışını göstereceğiz. O eylem ispat yerine geçecektir. Bunun için yapılacak iş basittir. (29.15) ifadesinin sağ yanındaki terimlerin paydalarını eşitleyip ortak payda altında toplarız. Sağ tarafın payına

gelecek olan polinoma $S(x)$ dersek, (29.15) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} \tag{28.10}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan $P(x) \equiv S(x)$ olması gerektiği çıkar. Bu özdeşlikte eşit dereceli terimlerin katsayılarını eşitleyerek istenen $A_1, A_2, \dots, A_n$ katsayıları hesaplanabilir.

Katsayıları kolay hesaplamaya yarayan başka pratik bir yöntem de şöyledir: (29.15) eşitliğinin iki yanını herhangi bir $(x - a_j)$ ile çarpıp $x \to a_j$ iken limiti hesaplayalım: Her $(1 \le j \le n)$ için,

$$A_j = \lim_{x \to a_j} (x - a_j)\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a_j)}{(a_j - a_1)(a_j - a_2)\dots(a_j - a_n)} \tag{28.11}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte paydası $(x - a_j)$ olan terime karşılık gelen A_j katsayısı bulunmuş olur. Her $(1 \le j \le n)$ için bu eylem yapılırsa, $A_1, A_2, \dots, A_n$ katsayıları hesaplanmış olur. Bu işleme dikkat edersek, yapılan iş,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)} \tag{28.12}$$

eşitliğinin sağ yanında paydadaki $(x - a_j)$ çarpanını yok sayıp geride kalan ifadede x yerine a_j koymaktan ibarettir. Katsayıların hesaplanmasında bu oldukça kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

Örnekler: Bazen paydayı çarpanlarına ayırmak integral işlemini basitleştirir.

5.

$$\int \frac{x+4}{x^2 - 5x + 6}dx \tag{28.13}$$

integralini hesplamak için, ifadeyi basit kesirlerine ayıracağız.

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} = \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} \tag{28.14}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \tag{28.15}$$

$$= \frac{Ax - 3A + Bx - 2B}{(x-2)(x-3)} \tag{28.16}$$

$$\Longrightarrow (A+B) = 1, \qquad -3A - 2B = 4 \tag{28.17}$$

$$\Longrightarrow a = -6, \quad B = 7 \tag{28.18}$$

olur. Buradan,

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}dx = -6\int \frac{1}{x-2}dx + 7\int \frac{1}{x-3}dx \tag{28.19}$$

$$= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C \tag{28.20}$$

çıkar.

6.

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)}dx = \frac{A}{x-2} + \frac{A}{x+2} + \frac{A}{x-5}$$

$$= \frac{104}{84(x-5)} + \frac{35}{x-2} + \frac{15}{x+2}$$

yazılabilir. Buradan

$$\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)}dx = \int \frac{104}{84(x-5)} + \int \frac{35}{x-2} + \int \frac{15}{x+2}$$
$$= \frac{1}{84}(104\ln|x-5| - 35\ln|x-2| + 15\ln|x+2| + C$$

bulunur.

7. Payın derecesi paydanınkinden büyükse, önce bölme işlemi yapılır, sonra yukarıdaki yönteme başvurulur:

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx$$

integralini hesaplamak için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^3-4}{x^2-x-2} = (x+2) + \frac{9x+2}{x^2-x-2}$$

olduğundan

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx = \int (x+2)dx + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx$$

yazılabilir. Sağdaki integrali hesaplamak için,

$$\frac{9x+2}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$
$$\Longrightarrow A = \frac{7}{3},\ B = \frac{20}{3}$$

olduğu düşünülürse,

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C_2$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x + +\frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C, \qquad (C = C_1 + C_2)$$

bulunur.

8.

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx = \int \left(1 + \frac{x+2}{x^3-x}\right)dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x}dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yandaki integral içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$
$$= \frac{A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ -A = 2 \end{cases}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = -2$, $B = 3/2$, $C = 1/2$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx &= x - 2\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C\end{aligned}$$

çıkar.

9. Paydanın bir yada iki dereceli bir çarpanı m kez tekrar ediyorsa, onu kesirlerine ayırırken söz konusu çarpan için, dereceleri 1 den m ye kadar değişen terimler eklenir.

Örnek 28.21.

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2}$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A + B + & = 0 \\ -2A - B + C & = 0 \\ A & = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2} &= \int \frac{1}{x}dx \;\; - \int \frac{1}{x-1}dx \;\; + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

çıkar.

28.5.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa

Payda'da $ax^2 + bx + c$ gibi ikinci dereceden bir çarpan var ve $b^2 - 4ac < 0$ ise o çarpana ait gerçel kök yoktur. Basit kesirlere ayırırken ona ait terimi $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ biçiminde yazarız. Tabii, aynı düşünceyi

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx, \quad \int \frac{x}{x^2+a^2}dx, \quad \int \frac{1}{x^2-a^2}dx, \quad \int \frac{x}{x^2-a^2}dx$$

tipi integrallerin hepsine uygulayabiliriz. Sonuçlar daima,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \tag{28.21}$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C \tag{28.22}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C \tag{28.23}$$

$$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C \tag{28.24}$$

formüllerine indirgenebilir.

Örnekler

1.

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3+x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx = \int \left(\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} &= \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x-1)(x+1)} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A+B &= 1 \\ C &= 3 \\ A &= 2 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 2,\ B = -1,\ C = 3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1} + 3\int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\tan^{-1}x + C\end{aligned}$$

çıkar.

2.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \int \left(\frac{1}{(x-a)(x+a)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a)} + \frac{B}{x+a} \\ &= \frac{Ax+Aa+Bx-Ba}{(x^2-a^2} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A+B &= 0 \\ Aa-Ba &= 1 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/(2a),\ B = -1/(2a)$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}dx \\ &= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C\end{aligned}$$

çıkar.

3. Bazen uygun bir değişken değiştirimi ile payda'nın türevi paya eşitlenebilir.

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5 44x^3+x}dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx = \int \left(\frac{x^2+2}{x((2x^2+1)(2x^2+1)^2}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2} \\
&= \frac{A(4x^2+4x+1)+B(2x^4+x^2)+C(2x^3+x)+Dx^2+Ex}{4x^5+4x^3+x} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 4A+2B & =0 \\ 2C & 0 \\ 4A+B+D & =1 \\ A & =2 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=2$, $B=-4$, $C=0$ $D=-3$, $E=0$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx &= 2\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{xdx}{2x^2+1} - 3\int \frac{xdx}{(2x^2+1)^2} \\
&= 2\ln|x| - \int \frac{du}{u} - \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2}, \qquad (u = 2x^2+1) \\
&= 2\ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C \\
&= 2\ln\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right) + \frac{3}{4}\ \frac{1}{2x^2+1} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

4.

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \\
&= \frac{A(x^2-x+1)+B(x^2+x)+C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B & =0 \\ -A+B+C & =0 \\ A+C & =1 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/3$, $B = -1/3$, $C = 2/3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.22.

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{3dx}{3x-4}$	2. $\int \frac{dx}{3-5x}$
3. $\int \frac{xdx}{\pi x-3}$	4. $\int \frac{x^2dx}{x-3}$
5. $\int \frac{dx}{x^2-4}$	6. $\int \frac{dx}{3-x^2}$
7. $\int \frac{x^2}{x^2+2x-2}$	8. $\int \frac{xdx}{3-x^2}$
9. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$	10. $\int \frac{1}{a^2-b^2x^2}dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{x-3}{x^2+x}dx$	2. $\int \frac{1}{9x+x^3}dx$
3. $\int \frac{1}{9x^2-6x+2}dx$	4. $\int \frac{x}{2+6x+9x^2}dx$
5. $\int \frac{1+x^2}{9x^2-6x}$	6. $\int \frac{1+x^3}{x^2+7x+12}dx$
7. $\int \frac{x^3}{x^3-a^3}$	8. $\int \frac{dx}{2x+2x^2+x^3}$
9. $\int \frac{1}{x^4-3x^3}$	10. $\int \frac{x}{1-x+x^2}dx$

Karma problemler

1. Aşağıdaki integral formüllerini doğruluğunu sağlayınız.

Örnek 28.23.

$$\int \frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Örnek 28.24.

$$\int \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}C$$

Örnek 28.25.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

Örnek 28.26.

$$\int \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2\tan x se^2 x + C$$

Örnek 28.27.

$$\int x(a^x)dx = \frac{a^x(\ln a - 1)}{\ln^2 a} + C$$

Örnek 28.28.

$$\int x(\sinh x)dx = x(\cosh x) + \sinh x + C$$

Örnek 28.29.

$$\int \sin\sqrt{x}dx = 2(\sin\sqrt{x} - 2\cos\sqrt{x} + C$$

Örnek 28.30.

$$\int \sin^{-1}(\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}(\sqrt{-(x-1)x} + \sin^{-1}(\sqrt{x}) + C$$

Örnek 28.31.

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x})dx = (x+1)tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$$

Örnek 28.32.

$$\int x\ln x = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

2. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

Örnek 28.33.

$$\int \frac{x^2-5x-9}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \left\{\frac{1}{6}(-13\ln(x-1)+9\ln(x+1)+10\ln(x+2))\right\}+C$$

Örnek 28.34.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2} \\
&= \frac{A(x+2)^2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A & = 4 \\ A+B & = 3 \\ B= & = 3-A=3-4=-1 \\ C & = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=4$, $B=-1$, $C=3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3\int (x+2)^{-2}dx + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.35.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2} \\
&= \frac{A(x+2)^2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A & = 4 \\ A+B & = 3 \\ B= & = 3-A=3-4=-1 \\ C & = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=4$, $B=-1$, $C=3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3\int (x+2)^{-2}dx + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 28.36.

$$\begin{aligned}
\int (1-3x)^5 dx &\Longrightarrow t = 1-3x,\ dt = 3dx \\
&= \int t^5 (\frac{-1}{3} dt \\
&= \frac{-1}{3}\frac{1}{6}t^6 \\
&= \frac{-1}{18}(1-3x)^6 + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.37.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\ln x+4)^3}{x}dx &\Longrightarrow t = \ln x + 4,\ dt = \frac{1}{x}dx \\
&= \int t^3 dt \\
&= \frac{1}{4}t^4 \\
&= \frac{1}{4}(\ln x+4)^4 + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.38.

$$\begin{aligned}
\int a^x dx &\Longrightarrow t = a^x \Rightarrow t = e^{x\ln a}, \\
&= \int e^{x\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}e^{x\ln a} + C \\
&= \frac{1}{\ln a}a^x + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.39.

$$\begin{aligned}
\int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &\Longrightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt, \\
&= 2\int a^t dt \\
&= \frac{2}{\ln a}a^t + C \\
&= \frac{2}{\ln a}a^{\sqrt{x}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 28.40.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{1+x^8}dx &\Longrightarrow t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3dt,\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2}dt\\ &= \frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)+C\end{aligned}$$

Örnek 28.41.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx &\Longrightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C\\ &= \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}dx\\ &= \ln|\sin x + \cos x| + C\end{aligned}$$

Örnek 28.42.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\cos^5 x}\, \sin x dx &\Longrightarrow t = \cos x,\ dt = -\sin x dx\\ &= -\int \sqrt{t^5}dt\\ &= -\int t^{5/2}dt\\ &= -\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + C\\ &= -\frac{2}{7}(\cos^{\frac{7}{2}} x + C\end{aligned}$$

Örnek 28.43.

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{x-3}\, dx &\Longrightarrow t^2 = x-3,\ 2tdt = dx,\ x = t^2+3\\ &= \int (t^2+3)^3.t.(2tdt), \qquad [(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3]\\ &= 2\int (t^8+9t^6+27t^4+27t^2)dt\\ &= \frac{2}{9}t^9 + \frac{18}{7}t^7 + \frac{54}{5}t^5 + \frac{54}{3}t^3 + C\\ &= \frac{2}{9}(x-3)^{\frac{9}{2}} + \frac{18}{7}(x-3)^{\frac{7}{2}} + \frac{54}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 18(x-3)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Örnek 28.44.

$ekok\{4,\ 5\} = 20 \Rightarrow t^{20} = x+1,\ 20t^{19}dt = dx,\ x = t^{20}-1$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3+\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx &= \int \frac{3+\sqrt[4]{t^{20}}}{\sqrt[5]{t^{20}}}(20t^{19}dt \\
&= \int \frac{3+t^5}{t^4}(20t^{19})dt \\
&= 20\int \left(t^{20}+\frac{3t^{19}}{t^4}\right)dt \\
&= \frac{20}{21}t^{21}+\frac{15}{4}t^{16}+C \\
&= \frac{20}{21}(x+1)^{\frac{21}{20}}+\frac{15}{4}(x+1)^{\frac{4}{5}}+C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 28.45.

$u = x,\ dv = e^x dx,\ du = dx,\ v = e^x,\ \int u\,dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx \\
&= xe^x - e^x + C \\
&= e^x(x-1)
\end{aligned}$$

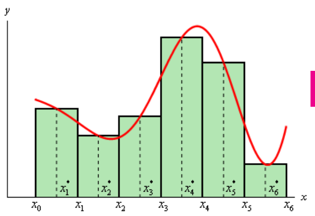
bulunur.

Örnek 28.46.

$u = x^2,\ dv = e^x dx,\ du = 2xdx,\ v = e^x,\ \int u\,dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx \\
&= x^2e^x - 2e^x(x-1)+C \\
&= e^x(x^2-2x+2)+C
\end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 28.1: Düzlemsel bölgenin alanı

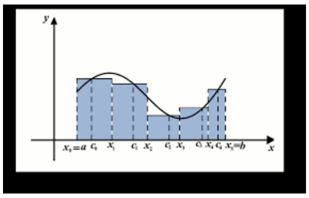
28.6 Belirli İntegral

Düzlemde kare, dikdörtgen, üçgen, çember gibi iyi bilinen geometrik şekillerin alanlarını bulmak için uygun formüller kullanıyoruz. Ama, uygulamada alanını bilmek isteyeceğimiz düzlemsel alanlar, yukarıda sayılan şekillerden hiç birisine benzemeyebilir. Üstelik bunların sayısı bilinen geometrik şekillerden daha çoktur.

Bilimin her alnında olduğu gibi, matematik de theoremları genişletme ve mümkünse genelleştirme peşindedir. Belirli integral bu gereksemeden doğmuştur. İlk genelleşme, bilinen geometrik şekiller yerine, bilinen fonksiyonlarla sınırlanmış düzlemsel bölgelerin alanlarının hesaplanması işidir. Daha sonra çok boyutlu uzaylarda yüzey alanlarını bulmaya genişletilmiştir. Ayrıca, fizikte farklı amaçlarla kullanılmaya başlanmıştır.

Şimdi bir $[a,b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunu düşünelim. Ox- ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alanı hesaplamak isteyelim. Genişleme için daima iyi bildiğimiz kavramlara dayanırız. Dikdörtgenin alanını iyi bildiğimize göre, söz konusu dülemsel alanı dikdörtgenlere ayırmaya çalışalım. Tabii, y=f(x) fonksiyonu Ox-eksenine paralel bir doğru değilse, dikdörtgenlerin alanlarının toplamı ancak gerçek alanın yaklqaşık bir değeri olur. Şimdi bunu geometrik olrak açıklayalım:

nın yaklaşık



Önce, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde pozitif değerler aldığını varsayalım. $[a,b]$ aralığını, eşit olması gerekmeyen alt aralıklara bölelim:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{28.25}$$

Her $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında bir c_i noktası seçelim. $f(c_i) = yi$ diyelim. Ox-ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alan, yaklaşık olarak tabanı $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ve yüksekliği $y_i = f(c_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ olan dikdörgenlerin alanları toplamına eşittir. Bunu şöyle ifade edelim:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \ldots + y_n \Delta x_n \tag{28.26}$$

(29.1) ifadesine $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü (partition), (28.26) toplamına da bu parçalanışa ait Riemann toplamı denilir. Ayrıntıya girmeden, f nin belirli koşulları sağlaması durumunda, en büyük Δx_i uzunluğu sıfıra yaklaşırken (28.26) toplamının varlığını söyleyeceğiz:

$$\lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0} s_n = \lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i \tag{28.27}$$

Tabii, $\lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0}$ olduğunda alt aralıkların sayısı sonsuz olur ve her bir alt aralığın uzunluğu sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla, (28.27) toplamı bir sonsuz serinin toplamına dönüşür.

28.7 Belirsiz İntegral Kuralları

Teorem 28.47. *$f(x)$ ile $g(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, $k \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ise, aşağıdaki bağıntılar vardır:*

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, *(k sabit sayı)*
3. $\int_a^b kf(x)dx \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx, \quad (c \in [a,b])$

4. $\int_a^b k dx = k(b-a)$
5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$
6. $\int_a^a f(x)dx = 0,$
7. $x \in [a,b]$ *ve* m, M *sabit sayılr olmak üzere* $m \le f(x) \le M$ *ise*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a<b)$
9. $x \in [a,b]$ *için* $f(x) \ge 0$ *ise* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$
10. $x \in [a,b]$ *için* $g(x) \ge f(x)$ *ise* $\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$

28.8 Calculus'un Birinci Temel Teoremleri

28.8.1 Calculus'un 1.Teoremi

Teorem 28.48. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise;*

$F(x) = \int_a^b f(x)dx, \quad x \in [a,b]$

foksiyonu (a,b) aralığında süreklidir, türetilebilir ve

$F'(x) = f(x) \quad x \in (a,b)$

eşitliği sağlanır.

28.8.2 Calculus'un İkinci Temel Teoremi

Teorem 28.49. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, yukarıdaki gösterimler altında,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{28.28}$$

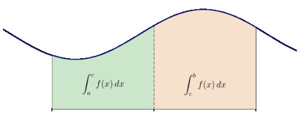
dır.

Örnek 28.50.

$y = f(x),\ Ox,\ x = a,\ x = b$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan,

$$\int_a^b f(x)dx \tag{28.29}$$

belirli integrline eşittir.



Şekil 28.3: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması

Örnek 28.51.

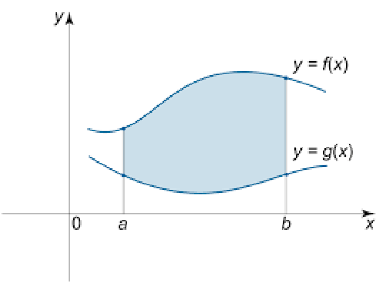
$y = 2x$ eğrsi, Ox doğrusu, $x = 1$ ve $x = 2$ doğrularının sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.

$$A = \int_1^2 2x dx \tag{28.30}$$

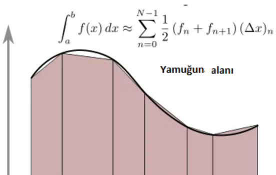
$$= x^2\Big|_1^2 \tag{28.31}$$

$$= 2^2 - 1 = 3 \tag{28.32}$$

$$A = \frac{2+4}{2} \times 1 = 2 \tag{28.33}$$

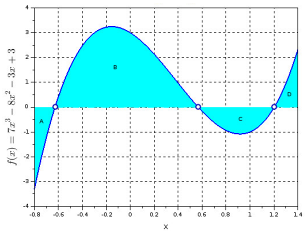


Şekil 28.4: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması



Aynı sonucu, Şekil 28.5'deki yamuğun alan formülü ile de bulabiliriz. Anımsayacağınız gibi, yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yarısının yüksekliği ile çarpımına eşittir.

Bazı aralıklarda $y = f(x)$ fonksiyonu negatif değerler alabilir. O zaman (28.26) Riemann toplamındaki negatif y_i ler için gikdörtgen alanları negatif olur. Oysa, düzlemsel alanın değeri daima pozitif olmalıdır.Negatif alan tanımmlı değildir. O nedenle, negatif alanları pozitif yapmalıyız. Bunu yapmak için fonksiyonun negatif değerler aldığı aralıkları saptar ve onlar için bulduğumuz belirli integrali pozitif yaparız. Bu eylemi pratik bir formüle bağlamak da mümkündür:



Şekil 28.6: Negatif Alanlar

$$A = \int_a^b |f(x)|dx \tag{28.34}$$

Örnek 28.52.

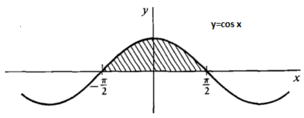
eğrisi altında ve $[\frac{1}{2}, 1]$ alaığı üzerinde kalan alanı bulunuz. Verilen bölgede $y = \cos x$ fonksiyonu pozitif değerler aldığı için, istenen alan,

$$A = \int_{0.5}^{1} \cos x dx = \sin x|_{0.5}^{1} \tag{28.35}$$

$$= \sin(1) - \sin(0.5) \tag{28.36}$$

$$= 0.841 - 0.479 \tag{28.37}$$

$$= 0.362 \tag{28.38}$$



Şekil 28.7: $y = \cos x$ altındaki Alan

olur.

Örnek 28.53.

Yarıçapı $r = 3$ olan dairenin üst yarı düzlemdeki alanını bulunuz.

$$\begin{aligned}
\frac{A}{2} &= \int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx = \int 3\sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t dt, \quad [x = 3\sin t, \quad dx = 3\cos t dt\,] \\
&= 9\int_0^{\pi/2} cos^2 t dt \\
&= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt \\
&= \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\int \cos 2t\, dt \\
&= \frac{9}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{9}{2}\sin -1(1) \\
&= \frac{9}{2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}$$

olur.

Uyarı 28.54. *Aşağıdaki integral formülü kullanılırsa aynı sonuç elde edilir.*

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$$

Örnek 28.55.

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 = 9$$

Örnek 28.56.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (4x^3 - 9x^2)dx &= 4\int_0^2 x^3 dx - 9\int_0^2 x^2 dx\\ &= (x^4 - 3x^3)\big|_0^2\\ &= 2^4 - 3(2)^3\\ &= 1624 = -8\end{aligned}$$

Örnek 28.57.

$$\int_{-2}^0 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{8}(2x-1)^4\Big|_{-2}^0 = -78$$

Örnek 28.58.

$y = x^2 - 4x + 5$ ile $y = 2x - 3$ eğrileri arqasında kalan alanı bulunuz.

$$\begin{aligned}\int_1^3 [(x^2 - 4x + 5)]dx &= \int_2^4 (-x^2 - 4x + 5)dx\\ &= \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x)\Big|_1^3 \qquad = (\frac{64}{3} + 48 - 32)\\ &= \frac{64}{3}\end{aligned}$$

Örnek 28.59.

$$\int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^3 = \frac{2^3}{\ln 2} = \frac{8}{\ln 2}$$

Örnek 28.60.

$$\int_0^{2\sqrt{2}} (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x\Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{22\sqrt{2}}{3}$$

Örnek 28.61.

$y = 1 - x^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} (1 - x - x^2)dx = 5\frac{5}{6} = 1.86339$$

Örnek 28.62.

$y = 16x - 10x^2 + x^3$ ile $y = -16x + 10x^2 - x^3$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_0^2 (32x - 20x^2 + x^3)dx + \int_2^8 (32x - 20x^2 + x^3)dx = \frac{1136}{3} = 378.667$$

Örnek 28.63.

$y = |x|$ ile $y = 6 - x^2$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

$$\int_{-3}^3 (6 - x^2 + |x|)dx = 27$$

Örnek 28.64.

$[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde $y = \sin x$ ile $y = \cos x$ eğrileri arasında ve [kalan alanı bulunuz.

$$\int_0^{\pi/4} (\cos - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (-\cos + \sin x)dx = 2\sqrt{2} \approx 2.82843$$

28.9 Belirsiz İntegral

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihsiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

28.9.1 Belirsiz İntegral Formülleri

Temel Formüller: Aşağıdaki formüllerde u = u(x) fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin de sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

1. $\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{u} \, du = ln|u| + C,$
3. $\int u dv = uv - \int v du$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
4. $\int \frac{1}{au+b} \, du = \frac{1}{a} ln|au + b| + C$

28.10 Alan Hesabı

28.11 İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı

1. Pappus teoremini kullanarak dik dairesel koninin yanal yüzeyinin alanını ve hacmini bulunuz.

   Çözüm:

   Genel olması için koninin yüksekliği olarak herhangi bir r sayısı alalım. Koninin simetri doğrusu $Oy-$ ekseni olacak şekilde tepe noktasını

(O, O) başlangıç noktasına koyalım. Koni şekilde görüldüğü gibi baş aşağı konumlanmış olsun.

Koninin yanal yüzeyindeki $|OB|$ doğru parçasının kütle merkezi, $|OB|$ bin orta noktasıdır: $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}h)$ dir. Alan

$$\begin{aligned} A &= |OB|.2\pi R = 2\sqrt{r^2+h^2}.\pi\frac{r}{2} \\ &= \pi r\sqrt{r^2+h^2} \end{aligned}$$

OAB üçgeninin kütle merkezi $(\frac{r}{3}, \frac{h}{2})$ dır. Hacim

$$V = (2\pi R)\frac{rh}{2} = 2i\frac{r}{3}.\frac{rh}{2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

olur.

2. Pappus'un ikinci teoremini kullanarak $y = \sqrt{r^2-x^2}$, $-r \le x \le r$ yayının kütle merkezini bulunuz.

Çözüm:

Pappus'un ikinci teoremini kullanacağız. Kürenin lanının $4\pi r$ olduğunu biliyouz. Buna göre;

$$\overline{x} = 0, \tag{28.39}$$

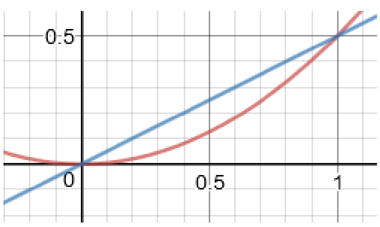
$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{\int \tilde{y}dm}{ydm} \\ &= \frac{\int \sqrt{r^2-x^2}.\sqrt{-t1+y^2}\,dx}{ds} \\ &= \frac{\int \sqrt{r^2-x^2}.\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}\,dx}}{\int \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx} \\ &= \frac{\int_{-r}^{r} r\,dx}{\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx} \\ &= \frac{2r^2}{\pi r} \\ &= \frac{2r}{\pi} \end{aligned}$$

Yüzey Alanı S:

$$S = (r\pi)2\pi(\frac{2r\pi}{)} = 4\pi r^2 \tag{28.40}$$

çıkar. Buunu daha kısa yolla yapabiliriz.

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 &= (r\pi)2\pi\overline{y} \\ &\Rightarrow \overline{y} = \frac{2}{\pi}r \end{aligned}$$



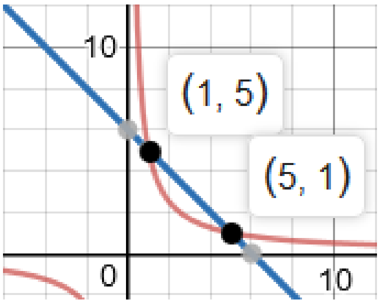
Şekil 28.8: Eğri ler arasındaki alan

Verilen iki denklemin grafikleri arasında kalan bölgenin alanını çift katlı integralle hesaplayınız.

a) $y = \frac{x^2}{4}, y = \frac{1}{2}x + 2$

$$\begin{aligned}
Alan &= \int_{-2}^{4}\int_{x^2/4}^{2+x/2} dydx \\
&= \int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+2-\frac{x^2}{4}\right)dx \\
&= (4+8-\frac{64}{8})*(1-4+\frac{8}{12}) \\
&= 15-6 \\
&= 9
\end{aligned}$$

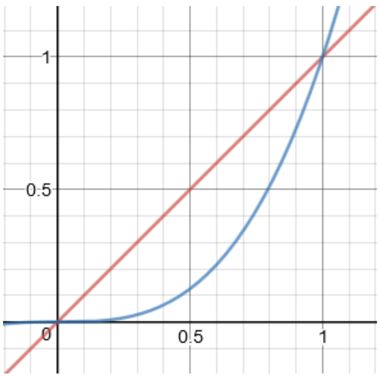
b) $xy = 5, x + y = 6$



Şekil 28.9: $xy = 5, x + y = 6$

$$\begin{aligned}
Alan &= \int_{1}^{5}\int_{5/x}^{6-x} dydx \\
&= \int_{1}^{5}\left((6-x)-\frac{5}{x}\right)dx \\
&= (6-\frac{x^2}{2}-5ln(x))\Big|_1^5) \\
&= (30-\frac{25}{2}-5ln5)-(6-\frac{1}{2}-5ln1) \\
&= 30-18-5ln5 \\
&= 12-5ln5 \\
&= 9
\end{aligned}$$

c) $y = x, y = x^3$



Şekil 28.10: $y = x, y = x^3$

$$\begin{aligned}
Alan &= 2\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} dydx \\
&= 2\int_{0}^{1}\left((x-x^3)\right)dx \\
&= 2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)_0^1 \\
&= 2(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. $x = a, y = a$ karesinden a yarıçaplı çember çıkarılıyor. Gei kaln düzlemsel bölgenin alanını bulınız

Çözüm:

Üst yarı düzlemdeki yarı yarı diskin üst sınırı $y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (-a \leq x \leq$

a), ve alt sınırı $y = 0$ doğrusudur. Buna göre;

$$\begin{aligned} M_{\overline{y}+r} &= \int\int_R x\,dA \\ &= \int_{-r}^{+r}\int_{-r}^{\sqrt{r^2-x^2}} x\,dx dy \\ &= \int_{-r}^{+r} (\sqrt{r^2-x^2}+r)x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\Big((r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+rx\Big)_{-r}^{+r} \\ &= -r^2 \end{aligned}$$

Örnek

r yarıçaplı bir çember, çember düzleminde ve çember merkezine $b, (b > r)$ uzaklıkta sabit duran bir eksen etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin (simit, torus, daughnut) yüzey alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm:

Çemberin ağırlık merkezi kendi merkezidir. Çemberin merkezi eksen etrafında bir dönüş yapınca $2\pi b$ kadar yol alır. Çemberin alanı πr^2 dir. Pappus teoremine göre hacim

$$V = (2\pi b)(\pi r^2) = 2\pi^2 br^2$$

olur, yüzey alanı ise

$$S = (2\pi b)(2\pi r) = 4\pi^2 br$$

olur.

Örnek

$x = a, y = a$ karesinden a yarıçaplı çember çıkarılıyor. Gei kaln düzlemsel bölgenin alanını bulınız

Çözüm:

Üst yarı düzlemdeki yarı yarı diskin üst sınırı $y = \sqrt{a^2-x^2}, \quad (-a \le x \le a)$, ve alt sınırı $y = 0$ doğrusudur. Buna göre;

$$\begin{aligned} M_{\overline{y}+r} &= \int\int_R x\,dA \\ &= \int_{-r}^{+r}\int_{-r}^{\sqrt{r^2-x^2}} x\,dx dy \\ &= \int_{-r}^{+r} (\sqrt{r^2-x^2}+r)x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\Big((r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+rx\Big)_{-r}^{+r} \\ &= -r^2 \end{aligned}$$

29 İntegral

[1]

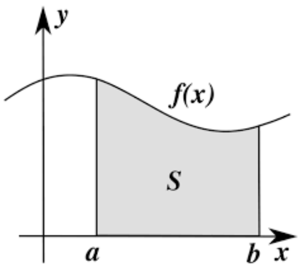
Sembolik anlamıya integral, türevi verilen fonksiyonu bulma eylemidir. Ama çıkış ortaya çıkış nedeni, düzlemsel alanların hesaplanması içindir. Tabii, düzlemsel alanlardan sonra yüzey alanlarının hesabına ve fiziksel uygulamalara genişlemiştir. Önce düzlemsel alan kavramını ele alacağız.

[1] $\int_a^b f(x)\,dx$

29.1 İntegral Kavramı ve Tanımı

29.1.1 Belirli İntegral

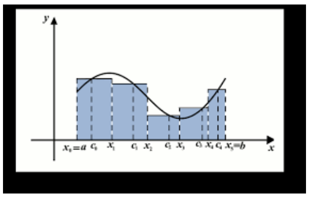
Düzlemde kare, dikdörtgen, üçgen, çember gibi iyi bilinen geometrik şekillerin alanlarını bulmak için uygun formüller kullanıyoruz. Ama, uygulamada alanını bilmek isteyeceğimiz düzlemsel alanlar, yukarıda sayılan şekillerden hiç birisine benzemeyebilir. Üstelik bunların sayısı bilinen geometrik şekillerden daha çoktur.



Şekil 29.1: Düzlemsel bölgenin alanı

Bilimin her alanında olduğu gibi, matematik de kuralları genişletme ve mümkünse genelleştirme peşindedir. Belirli integral bu gereksemeden doğmuştur. İlk genelleşme, bilinen geometrik şekiller yerine, bilinen fonksiyonlarla sınırlanmış düzlemsel bölgelerin alanlarının hesaplanması işidir. Daha sonra çok boyutlu uzaylarda yüzey alanlarını bulmaya genişletilmiştir. Ayrıca, beirli integral fizikte farklı amaçlar için kullanılmaktadır.

Şimdi bir $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunu düşünelim. Ox- ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alanı hesaplamak isteyelim. Genişleme için daima iyi bildiğimiz kavramlara dayanırız. Dikdörtgenin alanını iyi bildiğimize göre, söz konusu dülemsel alanı dikdörtgenlere ayırmaya çalışalım. Tabii, y=f(x) fonksiyonu Ox-eksenine paralel bir doğru değilse, dikdörtgenlerin alanlarının toplamı ancak gerçek alanın yaklaşık bir değeri olur. Şimdi bunu geometrik olarak açıklayalım:


Şekil 29.2: Eğri altındaki alanın yaklaşık değeri

Bölüntü $[a, b]$ aralığını, eşit olması gerekmeyen alt aralıklara bölelim:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{29.1}$$

(29.1) ifadesine $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü (partition) denilir. Bölüntü $[a, b]$ aralığını

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n] \tag{29.2}$$

olan $n \in \mathbb{N}$ tane küçük aralığa ayırır. Aralıkların uç noktaları $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ noktalarıdır. $x_0 = a$ ve $x_n = b$ dir. n sayısı farklı bölüntüler için farklı olabilir. $[a, b]$ aralığının bütün mümkün bölüntülerini $\mathscr{P}$ ile gösterelim.

Riemann Toplamı Riemnn integrali birbirlerine denk olan ifadelerle tanımlanabilir. Onlardan birisi aşağıda veriliyor:

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu kapalı $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sınırlı olsun. $[a, b]$ aralığının $n \in \mathbb{N}$ tane alt aralıktan oluşan bir bölüntüsü $P_n \in \mathscr{P}$ olmak üxere, her $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığında bir x_i^* noktası seçelim. $f(x_i^*) = y_i$ diyelim. Ox- ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alan, yaklaşık olarak tabanı $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ve yüksekliği $y_i = f(x_i^*)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olan dikdörgenlerin alanları toplamına eşittir. Bu yaklaşık değeri,

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i \tag{29.3}$$

ile gösterelim. (29.3) ifadesine $P_n \in \mathscr{P}$ bölüntüsüne ait *Riemann toplamı* denilir.

En büyük Δx_i uzunluğu $||P||$ olsun:

$$||P|| = max\{\,|\Delta x_i| : \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,\}$$

Tanım 29.1. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu kapalı $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sınırlı olsun. $P_n \in \mathscr{P}$ olmak üzere*

$$\lim_{||P|| \to 0} S(f, P_n) = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = I \tag{29.4}$$

limiti varsa, I sayısına f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki Riemann integrali denilir ve integral değeri için,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \tag{29.5}$$

simgesi kullanılır.

(29.5) gösterimindeki $\int$ simgesi "summation = toplam" sözcüğünün ilk harfinin bozulmuş şeklidir ve integral işareti diye anılır. x değişkenine integral değişkeni denilir. dx ise (29.4) toplamındaki Δx_i uzunluklarının maksimumu sıfıra giderkenki limitini gösterir. İntegrallenebilen fonksiyonlar sınıfını genişletmek amacıyla, Riemann integralinden farklı integral tanımları yapılmıştır. Onlar bu kitabın kapsamı dışındadır. Söylemi yalınlaştırmak için *Riemann integrali* yerine kısaca *integral* ya da *belirli integral* terimlerini eş anlamlı olarak kullanacağız.

Teorem 29.2. *Sürekli fonksiyonlar integrallenebilir.*

Kanıt: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olduğunun kanıtı bu kitabın kapsamı dışında olan *düzgün süreklilik* kavramını gerektiriyor. O konu analizin kapsamındadır. İspat ile ilgilenenler iyi bir analiz kitabına bakabilirler.

Örnek 29.3. *$f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun $[-1, 2]$ aralığında $P : -1 < 0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2} < 2$ bölüntüsü için Riemann toplamını bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
S(f,P) &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x_i \\
&= \big(f(-0.75)+f(-0.25)+f(0.25)+f(0.75) \\
&+ f(1.25)+f(.75)\big)\frac{1}{2} \\
&= 5.9375
\end{aligned}$$

olur.

29.2 Belirli İntegral Kuralları

Teorem 29.4. *$f(x)$ ile $g(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, $k \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ise, aşağıdaki bağıntılar vardır:*

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, *(k sabit sayı)*
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx, \quad (c \in (a,b)$
4. $\int_a^b kdx = k(b-a)$
5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$
6. $\int_a^a f(x)dx = 0,$
7. $x \in [a,b]$ *ve* m, M *sabit sayılar olmak üzere* $m \le f(x) \le M$ *ise*
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a<b)$
9. $x \in [a,b]$ *için* $f(x) \ge 0$ *ise* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$
10. $x \in [a,b]$ *için* $g(x) \ge f(x)$ *ise* $\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$

Kanıtlar: Listede yazılı olan kuralları kanıtlayalım.

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Kanıt 1: f ve g fonksiyonları integrallenebilen iki fonksiyon ise $h = f \pm g$ nin de integrallenebilir olduğunu göstereceğiz. Bir P_n bölüntüsü için için Riemann toplamını yazarsak, $p_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1,2,\ldots,n)$ olmak üzere,

$$S(h,P_n) = \sum_{i01}^{n} h(p_i)\Delta x_i$$
$$S(f,P_n) = \sum_{i01}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$
$$S(g,P_n) = \sum_{i01}^{n} g(p_i)\Delta x_i$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
S(h,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} h(p_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(f(p_i) \pm g(p_i)\big)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\Delta x_i
\end{aligned}$$

çıkar. Limit alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx &= \lim_{n\to\infty} \big(S(f,P_n) \pm S(g,P_n)\big) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

bulunur. □

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, ($k$ sabit sayı)

Kanıt 2: Riemann integral tanımında $[a,b]$ aralığını n parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. Her $i = 1,2,\dots,n$ için $x_i^* \in [x_{i-1},x_i]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\int_a^b kf(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} kf(x_i^*)\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \\
&= k\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i) \\
&= k\int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx, \quad (c \in (a,b)$

Kanıt 3: $[a,c]$ arlığının bir bölüntüsü Q, $[c,b]$ aralığının bir bölüntüsü R olsun. Bu iki bölüntüsünün bileşimi $P = Q \cup R$ ile gösterelim. $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü P olacaktır. Riemann toplamları için

$$S(f,P) = S(f,Q) + S(f.R)$$

yazabiliriz. $(||Q|| \to 0) \wedge (||R|| \to 0) \iff (||P|| \to 0)$ olduğundan

$$\lim_{||P||\to 0} S(f,P) = \lim_{||Q||\to 0} S(f,Q) + \lim_{||R||\to 0} S(f,R)$$

olur ki bu isteneni verir. □

4. $\int_a^b kdx = k(b-a)$

Kanıt 4: Bu kural Calculus'un Temel teoreminin bir sonucudur. Riemann integral tanımında $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ olur. Her $x \in [a]$ için $f(x) = k$ olsun.

$$\begin{aligned}
\int_a^b k\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} k\,\delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} k\,\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} n.k\,\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} k\,(b-a)
\end{aligned}$$

5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$

Kanıt 5: Riemann integral tanımında $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ olur.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

dir. $-\Delta x = -\frac{(a-b)}{n} = \frac{-(b-a)}{n}$ dir. Her $i = 1,2,\dots,n$ için $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(\Delta x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{(b-a)}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{-(a-b)}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left[-\left(\frac{(a-b)}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[-\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{(a-b)}{n}\right)\right] \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(-\Delta x) \\
&= -\int_b^a f(x)dx
\end{aligned}$$

□

6. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Kanıt 6: Riemann integral tanımında $[a,a]$ aralığını n eşit parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(a-a)}{n} = 0$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\int_a^a f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(\Delta x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(0)\\ &= \lim_{n\to\infty} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

□

7. $x \in [a,b]$ ve m, M sabit sayılar olmak üzere $m \le f(x) \le M$ ise

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Kanıt :

$$\begin{aligned} m\int_a^b dx &= m(b-a) \qquad ((4)'den)\\ M\int_a^b dx &= M(b-a) \qquad ((4)'den)\end{aligned}$$

□

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a<b)$

Kanıt 8: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ dir. f süreki lduğundan $|f|$ de sürekidir. Önceki kural uygulanırsa,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

çıkar.

9. $x \in [a,b]$ için $f(x) \ge 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

Kanıt 9: f ntegrallenebilir ve $f(x) \ge 0$ ise $[a,b]$ aralığının bir P bölüntüsü için, $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere Riemann toplamı $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$ ve

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{||p||\to 0} S(f,P) \ge 0$$

çıkar.

10. $x \in [a,b]$ için $g(x) \le f(x)$ ise $\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$

Kanıt 10: f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integralenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) \le f(x)$ ise

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$

olduğunu österelim. $g(x) \le f(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \ge 0$ olur. 9.Kural uygulanırsa,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

elde edilir.

29.3 Calculus'un Temel Teoremleri

29.3.1 Calculus'un 1.Temel Teoremi

[2]

[2] $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$

Teorem 29.5. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve*

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx, \qquad (x \in (a,b))$$

ise

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

eşitliği sağlanır.

Kant:
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ise $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$= \int_a^{x+h} f(t)\,dt * \int_a^x f(t)\,dt$$
$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

çıkar.

Durum 1: $h > 0$ olsun.

$[x, x+h]$ aralığında $y = f(t)$ fonksiyonunun min dğeri m ve max değeri M ise Theorem (29.55)-7'den

$$mh \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le Mh$$

olur. Buradan

$$m \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M$$

çıkar. f sürekli olduğundan cendere teoreminden limit alınırsa,

$$F'(x) = \lim h \to 0 \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

elde edilir.

Durum 2: $h > 0$ ise benzer kanıt yöntemi uygulanabilir.

Örnek 29.6.

$$D_x\left(\int_1^x t^2\,dt\right)$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\int_1^x t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$
$$= D_x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = x^2$$

Farklı bir yöntem olarak, Calculus'un 1.Teoremi kullanılarak,

$$\int_1^x t^2 = x^2$$

elde edilir.

29.3.2 Calculus'un İkinci Temel Teoremi

[3] $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

3

Teorem 29.7. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, yukarıdaki gösterimler altında,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{29.6}$$

dır.

Kanıt:
$[a,b]$ nin bir P bölüntüsü,

$$P:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

ise

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) \\ &\quad - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) - \cdots F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \end{aligned}$$

Türevler için ortalama değer teoremi kullanılırsa, her $[x_{i-1}, x_i]\quad (i = 1,2,\ldots n)$ aralığı için

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_, - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i$$

olacak şekilde bir $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ sayısının varlığı çıkar. Sağ yan sabit ve sol yan Riemann toplamı olduğundan, limit alınırsa,

$$F(b) - F(a) = \lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

elde edilir.

Örnek 29.8.

1.
$$\int_a^b k\,dx = k(b-a) \quad (\text{k sabit})$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\int_a^b k\,dx = F(b) - F(a) = kb - ka = (b-a)$$

çıkar.

2.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = x$ ise $F(x) = \frac{x^2}{2}$ ve

$$\int_a^b x\,dx = fracx^2 2\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

çıkar.

Örnek 29.9. $\int_{-2}^{3}(x+3)\,dx$ *integralini belirli integral tanımını kullanarak hesaplayınız*

Çözüm: $[-2,3]$ aralığını her birisinin uzunluğu $\Delta x = \frac{1}{n}$ olan n eşit parçaya bölelim. Her bir $[x_{i-1}, x_i]$ aralıkta c_i böülüntü noktlarını alırsak, bölüntü noktalarını

$$\begin{aligned}
c_0 &= -2 \\
c_1 &= -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n} \\
c_2 &= -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right) \\
c_3 &= -2 + 3\Delta x = -2 + 3\left(\frac{5}{n}\right) \\
&\dots \\
c_i &= -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) \\
&\dots \\
c_n &= -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3
\end{aligned}$$

olarak seçelim. Buradan, $f(c_i) = c_i + 3 = 1 + i\left(\frac{5}{n}\right)$ olduğunu düşünerek Riemann toplamını yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(1 + i(\frac{5}{n})\right)\frac{5}{n} \\
&= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{25}{n^2}\right).\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{5}{n}.n + \frac{25}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{5}{n}.n + \frac{25}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{5}{n} + \frac{25}{2}.(1 + \frac{1}{n}) \\
&= 5 + \frac{25}{2}.\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan limite geçersek

$$\begin{aligned}\int --2^3\,dx &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad (|P|\to 0 \Leftrightarrow n\to\infty)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{25}{2}.(1+\frac{1}{n})\right)\\ &= \frac{35}{2}\end{aligned}$$

bulunur ki integralin gerçek değeridir.

29.4 *Belirsiz İntegral*

Belirsiz integral terimi, bir bakıma, Türkçe'de talihsiz bir adlandırmadır. İngilizce'de *indefinite integral* teriminin karşılığıdır. Ama o terim yerleştiğine göre, onu kullanmayı sürdürmeliyiz. Aslında bir fonksiyonun belirsiz integrali, birbirlerinden farkı birer sabit olan fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayıdır. O uzaydan herhangi birisi integral olarak alınabilir. Hangisinin alınacağı belirli değildir. *Belirsiz integral* deyimi onu ifade ediyor. Biz o kadar ayrıntıya inmeden çok kullanılan bazı fonksiyonların belirsiz integrallerini listelemekle yetineceğiz.

29.4.1 *Belirsiz İntegral Formülleri*

Temel Formüller: Aşağıdaki formüllerde u = u(x) fonksiyonunun ilgili aralıkta sürekli, türetilebilir, türevinin de sürekli olduğunu ve varsayacağız. $a, b, k \in \mathbb{R}$ sabit sayılardır.

1. $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{u}\,du = ln|u| + C,$
3. $\int udv = uv - \int vdu$ [parçalı (kısmi) integral formülü]
4. $\int \frac{1}{au+b}\,du = \frac{1}{a}ln|au+b| + C$

29.5 *Değişken Değiştirme*

Belirsiz integral verildiği biçemde bilinen integral formüllerinden hiç birisine benzemiyorsa, bazen uygun bir değişken değişimi ile bilinen formüllerden birisine dönüştürülebilir. Bu eylemin genel yöntemi şöyledir: $x = g(t)$ konumu yapılırsa, $dx = g'(t)dt$ olacağı düşünülürse,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \tag{29.7}$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı bilinen integral formüllerinden birisine benziyorsa, eşitliğin sağ yanı hesaplanabilir. Sonra asıl x değişkenine dönmek için $t = g^{-1}(x)$ ters fonksiyonunu kullanmak gerekir. Dikkat edilirse, bu sonuç zincir kuralına benziyor.

(29.7) formülü ile belirli integral değerleri de bulunabilir:

Teorem 29.10. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $g(t)$ fonksiyonu $\alpha \le g(t) \le \beta$ için sürekli ve $g'(t)$ türevi de sürekli ise $a = g(\alpha)$ ve $b = g(\beta)$ ise ya da buna denk olarak $\alpha = g^{-1}(a)$ ve $\beta = g^{-1}(b)$ ise,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(g(t))g'(t)dt \tag{29.8}$$

olur.

Belirli integral için var olan kurallar, Teorem 29.5 ve Teorem 29.7 yardımıyla belirsiz integrallere kolayca uygulanabilir.

Aşağıdakiler değişken değiştirimini gösteren örneklerdir.

Örnek 29.11.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}, \qquad (t = x^2+1,\ du = 2xdx)\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \ln\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

Örnek 29.12.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(2\ln x)}{x}dx &= \frac{1}{2}\int \sin t\,dt, \qquad (t = 2\ln x,\ dt = \frac{2}{x}dx,\ dx = \frac{x}{2}dt)\\ &= -\frac{1}{2}\cos t + C\\ &= -\frac{1}{2}\cos(2\ln x) + C\end{aligned}$$

Örnek 29.13.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x+1}\,e^x dx &= \int t^{1/2}dt, \qquad (t = e^x+1,\ dt = e^x dx,\ dx = e^{-x}dt)\\ &= \frac{2}{3}t^{3/2} + C\\ &= \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Örnek 29.14.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx &= \int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}dx\\ &= \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}dx\\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dt, \qquad [t = e^{-}x, \quad dt = -e^{-x}dx]\\ &= -\sin^{-1} t + C\\ &= -\sin^{-1}(e^{-x}) + C\end{aligned}$$

Örnek 29.15.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{5+4x+x^2}dx &= \int \frac{dx}{1+(x+2)^2}dx \\
&= \int \frac{du}{1+u^2}du, \qquad [u=(x+2), \quad du=dx] \\
&= \tan^{-1} u + C \\
&= \tan^{-1}(x+2) + C
\end{aligned}
$$

Örnek 29.16.

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx &= \int_1^2 \sin t\,dt, \qquad \left[t=\sqrt{x+1}, \quad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}\right] \\
&= 2\int_1^2 \sin t\,dt, \qquad [x=0 \Rightarrow t=1, \quad x=3 \Rightarrow t=2] \\
&= -2\cos u|_1^2 \\
&= 2(cos 1 - \cos 2)
\end{aligned}
$$

29.6 Trigonometrik İntegraller

Örnek 29.17.

$$
\begin{aligned}
\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx, \qquad (t=\cos x, \ dt=-\sin x\,dx) \\
&= -\int \frac{dt}{t} + C \\
&= -\ln|t| + C \\
&= -\ln|\cos x| + C \\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C \\
&= \ln|sec x| + C
\end{aligned}
$$

Örnek 29.18.

$$
\begin{aligned}
\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx, \qquad (t=\sin x, \ dt=\cos x\,dx) \\
&= \int \frac{dt}{t} + C \\
&= \ln|t| + C \\
&= \ln|\sin x| + C
\end{aligned}
$$

Örnek 29.19.

$t = (\sec x + \tan x)$, $dt = \sec x \tan x + \sec^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx, \\
&= \int \frac{sec^2 x + \sec x \tan x + sec^2 x}{sec x + \tan x} dx + C \\
&= \int \frac{dt}{t} \\
&= \ln|t| + C \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 29.20.

$t = (\csc x + \cot x)$, $dt = -(\csc x \cot x + \csc^2 x)dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \csc x dx &= \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx \\
&= \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} + C \\
&= \int -\frac{dt}{t} \\
&= -\ln|t| + C \\
&= -\ln|\csc x + \cot x| + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 29.21.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x . \cos^n x dx &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\
&= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx \\
&= \int (t^n (1 - t^2)^k dt + C
\end{aligned}$$

çıkar. $(1-t^2)^k$ binoma göre açılabilir ve sonuç t ye göre bir polinom olur. Polinom terim terime integrallenebilir. Sonra istenirse $\sin x$'e dönüşüm yapılabilir. Bunu bir örnekle açıklamak daha kolay olacaktır.

Örnek 29.22.

n tek ise $n = 2k+1$ ve $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x . \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x (\cos^2 x) \cos x dx \\
&= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx, \qquad (t = \sin x, \ dt = \cos x dx) \\
&= \int (t^2 - t^4) dt + C \\
&= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\
&= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C
\end{aligned}$$

Örnek 29.23.

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 x.\cos^8 x dx &= \int \sin^2 x(\cos^8 x)\sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^8 x \sin x dx, \qquad (t=\cos x,\;\; dt=-\sin x dx) \\
&= \int (1-t^2)t^8 dt + C \\
&= \int (t^8 - t^{10}) dt \\
&= \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{11}t^{11} + C \\
&= \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x + C
\end{aligned}
$$

Örnek 29.24.

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx, \qquad [\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C \\
&= \frac{1}{2}(x - \sin x.\cos x) + C
\end{aligned}
$$

Örnek 29.25.

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx, \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x)dx, \qquad [\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)] \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}
$$

29.7 *Ters Trigonometrik Konumlar*

Çok kullanışlı bazı ters trigonometrik konumlar (değişken değiştirimi),

$$x = a\sin\theta, \quad x = a\tan\theta, \quad x = a\sec\theta$$

fonksiyonları ile yapılır. Bunların karşıt fonksiyonları

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

dır.

Lemma 29.26.

İntegrali alınacak ifade $\sqrt{a^2-x^2}$, $(a>0)$ terimi içeriyorsa, $x = a\sin\theta$ ya da ona denk olarak $\theta = \sin^{-1}(\frac{x}{a})$ konumu yapılır.

Örnek 29.27.

a yarıçaplı bir disk içinde $b < a$ olmak üzere $[b, a]$ aralığına düşen daire kesmesinin A alanını bulunuz.

Çözüm: dairede simetriyi kullanırsak, sözkonusu alan I.bölgedeki alanın iki katı olacaktır. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
A = \int_b^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_b^a (a^2 \cos\theta) d\theta, \qquad & [x = a \sin\theta, \ dx = a \cos\theta d\theta] \\
= a^2 (\theta + \sin\theta . \cos\theta)\Big|_{x=b}^{x=a} & \\
= a^2 \left(\sin^{-1}(\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \right)\Bigg|_{x=b}^{x=a} & \\
= \frac{pi}{2} a^2 - a^2 \sin^{-1}(\frac{b}{a}) - b\sqrt{a^2 - b^2} &
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 29.28.

$$
\begin{aligned}
A = \int \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}} dx = \int \frac{3 \sec^2\theta}{3 \sec\theta} d\theta, \qquad & [x = 3 \tan\theta, \ dx = 3 \sec^2\theta d\theta] \\
= \int \sec\theta d\theta & \\
= \ln|sec\theta + \tan\theta| + C & \\
= \ln\left| \frac{\sqrt{9 + x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C & \\
= \ln\left(\sqrt{9 + x^2} + x \right) + C_1, \qquad & [C_1 = C - \ln 2]
\end{aligned}
$$

çıkar.

29.8 Çözümlü Problemler

1.
$$\int dx = x + C$$

2.
$$\int k \, dx = kx + C$$

3.
$$\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

4.
$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

5.
$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

6.
$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

7.

$$\int x^2(1-x^3)^5\,dx = -\frac{1}{18}x^3(x^3-2)(x^6-3x^3+3)(x^6-x^3+1)+C$$

8.

$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,dx = xsinh^{-1}(x)-\sqrt{x^2+1}+C$$

9.

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2-\ln(x^2+1)\right)+C$$

10.

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1}+C$$

11.

$$\int xe^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1)+C$$

12.

$$\int x(x-1)^6\,dx = \frac{1}{8}x^8-\frac{6}{7}x^7+\frac{5}{2}x^6-4x^5+\frac{15}{4}x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^2+C$$

13.

$$\int \frac{1}{5x+3}\,dx = \frac{1}{5}\ln(5x+3)+C$$

14.

$$\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$t=\sqrt{x}$ değişken değiştirimi yapılırsa

$$\begin{aligned} t=\sqrt{x} &= \\ dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt \\ x &= t^2 \Rightarrow x+1 = t^2+1 \\ x &= 4 \mapsto t=2 \\ x &= 9 \mapsto t=3 \end{aligned} \tag{29.9}$$

değişken değiştirimi yapılınca,

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx &= \int_2^3 \frac{t^2+1}{t^2+2t-3} \\ &= \int_2^3 \frac{2t^3+2t}{t^2+2t-3}dt \\ &= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{16t-12}{(t-1)(t+3)}\right)dt \\ &= \int_2^3 \left(2t-4+\frac{1}{t-1}+\frac{15}{t+3}\right)dt \\ &= t^2-4t+\ln|t-1|+15\ln|t+3||_2^3 \\ &= [9-12+\ln 2+15\ln 6]-[4-8+0+15\ln 5] \\ &= \ln 2+15\ln 6+15\ln 3-15\ln 5+1 \\ &= \ln 2+15\ln 6-15\ln 5+1 \end{aligned}$$

İstenirse, 5. eşitlikten sonra t değpişkeninden tekrar x değişkenine dönüşüm yapılabilir

$$\begin{aligned}\int_4^9 \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\,dx &= x-4\sqrt{x}+\ln|\sqrt{x}+3||_4^9 \\ &= \ln 2+15\ln 6-15\ln 5+1\end{aligned}$$

bulunur.

15.
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu problemi çözmek için önce (29.10) eşitsizliğinin varlığını göreceğiz.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx \le \lim_{n\to\infty}\lim\int_0^{2\pi} \frac{1}{x^2+n^2} \qquad = 0 \tag{29.10}$$

Sonra Teorem **??**-10.'yu kullanacağız:

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\,dx \tag{29.11}$$

$$\le \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2}\,dx \tag{29.12}$$

$$= \frac{2\pi}{n^2} \tag{29.13}$$

Bu eşitsizliklerden limite geçersek,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx \;\le\; \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^2} \;=\; 0$$

çıkar.

16.
$$\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\int (x+3)\sin(x^2+3x-5)\,dx &= \frac{1}{2}\int \sin(x^2+3x-5)d(x^2+3x-5) \\ &= -\frac{1}{2}\cos(x^2+3x-5)+C\end{aligned}$$

17.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}\,dx\\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x^2-x)}}\,dx\\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx, \quad t=(x-\frac{1}{2})\\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-t^2}}\,dt\\ &= \sin^{-1}\left(\frac{t}{5/2}\right)+e\\ &= \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right)+e\end{aligned}$$

18.

$$\int_0^1 x\ln(x+3)\;dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$t=\ln(x+3)$ konumu yapılırsa $dv = x\;dx,\;\; dt=\frac{dx}{x+3},\;\; v=\frac{x^2}{2}$ olur. Bunlar kısmi integral formülünde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\int x\ln(x+3)\;dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+3}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-3x+9\ln(x+3)\right)+C\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 x\ln(x+3)\;dx = \frac{5}{4}-\ln 4+\frac{9}{2}\ln 3$$

bulunur.

19.

$$\int e^{x/2}\sin(ax)\;dx = \frac{1}{(a^2+\frac{1}{4})}\;e^{x/2}\;\left(\frac{\sin(ax)}{2}-a\cos(ax)\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

20.

$$\int \frac{1}{(3\cos x+5)}\;dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\frac{x}{2}}{2}\right)+C$$

olduğunu sağlayınız.

21.

$$\int e^x\sin x\;dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

22.
$$\int x \sin x \, dx = \sin x x \cos x + C$$

23.
$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x} + C$$

24.
$$\int \csc(3x)\sec(3x) \, dx = \frac{1}{3}\left(\ln(sin(3x)) - \ln(\cos(3x))\right) + C$$

25.
$$\int \frac{1}{1+x^3} \, dx = \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

26.
$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} \, dx = -2\sqrt{4-x} + C$$

27.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} \, dx = -\frac{2x}{\sqrt{x^3}} + C$$

28.
$$\int 2\sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

29.
$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x} \, dx = \tan^{-1}(e^x)} + C$$

Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \frac{1}{(au+b)^2} \, du = -\frac{1}{u+a} + C, \quad (au + b \neq 0)$
2. $\int (u+b)^n \, du = \frac{1}{n+1}(u+a)^{n+1} + C,$
3. $\int u(u+a)^n \, du = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(u+a)^{n+1}\left((n+1)u - a\right) + C,$
4. $\int \frac{1}{1+u^2} \, du = tan^{-1} u + C$
5. $\int \frac{1}{a^2+u^2} \, du = \frac{1}{a} tan^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\frac{1}{a} cot^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
6. $\int \frac{1}{u^2-a^2} \, du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
7. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} tan^{-1}(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}) + C$
8. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \, dx = \frac{1}{2a} ln|ax^2 + bx + c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} tan^{-1}\frac{ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

Köklü İfadelerin İntegralleri:

1. $\int \sqrt{x-a} \, dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} + C$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} \, dx = 2\sqrt{x \pm a} + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} \, dx = -2\sqrt{a-x} + C$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} \, du = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C = -\cos^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}} \, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

7. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}\ du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{a^2 \pm u^2}}\right| + C$

8. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\ dx = \frac{1}{a}\cos^{-1}(\frac{u}{a}) = \frac{1}{a}\sec^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

9. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\ du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

10. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\ du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sin u\ du = -\cos u + C$
2. $\int \cos u\ du = \sin u + C$
3. $\int \tan u\ du = \ln|\sec u| + C = \ln|\cos u| + C$
4. $\int \cot u\ du = \ln|\sin u| + C$
5. $\int \sec u\ du = \ln|\sec u + \tan u| + C = \ln|\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$
6. $\int \sec^2 u\ du = \tan u + C$
7. $\int \csc^2 u\ du = -\cot u + C$
8. $\int \csc u \tan u\ du = \sec u + C$
9. $\int \csc u \cot u\ du = -\csc u + C$

Hiperbolik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \sinh u\ du = \cosh u + C$
2. $\int \cosh u\ du = \sin u + C$
3. $\int \tanh u\ du = \ln|\cosh u| + C$
4. $\int \coth u\ du = \ln|\sinh u| + C$
5. $\int sech(u)\ du = \tanh^{-1}(\sinh u) + C$
6. $\int csch(u)\ du = -\coth^{-1}(\cosh u) + C$
7. $\int sech^2(u)\ du = \tanh u + C$
8. $\int csch^2(u)\ du = -\coth u + C$
9. $\int sech(u)\tanh u\ du = -sech(u) + C$
10. $\int csch(u)\coth u\ du = -csch(u) + C$

Üstel Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int e^{ku}\ du = \frac{1}{k}e^{ku} + C$
2. $\int a^u\ du = \frac{1}{\ln a}a^u + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
3. $\int ua^{ku}\ du = \frac{1}{k\ln a}a^{ku} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
4. $\int u^2 a^{ku}\ du = a^{ku}\left(\frac{u^2}{k} - \frac{2u}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right) + C$
5. $\int \frac{e^{kx}}{x}\ dx = \ln u + \sum_{n=1}^{infty} \frac{(kx)^n}{n.n!}$

6. $\int e^{au} \sin bu \; du = \frac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu}{)} a^2 + b^2 + C$

7. $\int e^{au} \cos bu \; du = \frac{e^{au}(a \cos bu - b \sin bu)}{a^2+b^2} + C$

Logaritmik Fonksiyonların İntegralleri:

1. $\int \ln(kx) \; dx = x \ln(kx) - x + C$
2. $\int \ln(ax+b) \; dx = x \ln(ax+b) - x + \frac{b}{a} \ln(ax+b) + C$
3. $\int (\ln x)^2 \; dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$
4. $\int (\ln(kx))^n \; dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln(kx))^{n-1} \; dx + C$
5. $\int \frac{1}{\ln x} \; dx = \ln|\ln x| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n.n!} + C$
6. $\int x^m . \ln x \; dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \qquad (m \neq 1)$
7. $\int \frac{1}{x[\ln(x)]^n} \; dx = \frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$
8. $\int \ln(x^2 + a^2) \; dx = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \tan^{-1}(\frac{x}{a}) + C$
9. $\int \sin(\ln x) \; dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$
10. $\int \cos(\ln x) \; dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$

29.9 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri

29.9.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse

$y = \ln u \Longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln|u(x)| + C$$

yazabiliriz. Bazen uygun değişken değiştirimi ile integrali alınacak fonksiyon bu biçeme sokulabilir.

Örnekler:

1. $y = \ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$ bağıntısını kullanırsak,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

yazabiliriz.

2. İntegrali alınacak fonksiyon $\frac{1}{x-a}$ biçiminde ise, onun $\ln|x-a| + C$ foksiyonunun türevi olduğunu biliyoruz.

$$\int \frac{1}{x-2} dx \tag{29.14}$$

integralini hesaplamak için $w = x - 2,\; dw = dx$ konumu yapılsa,

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \int \frac{1}{w} dw = \ln|w| + C = \ln|x-2| + C$$

bulunur.

3. Paydanın türevi paya eşitse, bir değişken değiştirimi ifadeyi $\frac{dw}{u}$ biçimine dönüştürür.

$$\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr$$

integralini hesaplamak için

$$w = r^3-3r^2+1, \qquad dw = (3r^2-6r)dr = 3(r^2-2r)dr$$

konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{r^2-2r}{r^3-3r^2+1}dr &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{w}dw \\ &= \frac{1}{3}\ln|w|+C \\ &= \frac{1}{3}\ln|r^3-3r^2+1|+C\end{aligned}$$

bulunur.

4. Çoğunlukla payda'nın türevi paya eşit olmaz. Bu durumlarda da değişken değiştirimi bazen işe yarayabilir.

$$\int \frac{s+2}{s+3}ds$$

integralini hesaplamak için $w = s-3, \quad dw = ds$ konumu yapılısa,

$$\begin{aligned}\int \frac{s+2}{s+3}ds = \int \frac{w+5}{w}dw &= \int \left(1+\frac{5}{w}\right)dw \\ &= w+5\ln|w|+C \\ &= s-3+5\ln|s-3|+C\end{aligned}$$

bulunur.

29.9.2 Basit Kesirlere ayırma

Teorem 29.29. *$\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu için, payın derecesi paydadınkinden küçük ve paydanın baş katsayısı 1 olsun. Payda*

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

gibi doğrusal çarpanlarına ayrılabiliyorsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_1}{x-a_2}+\dots+\frac{A_1}{x-a_n} \tag{29.15}$$

biçeminde yazılabilir.

Bu teoremin formal ispatını vermeye gerek kalmadan, integral hesabında gerekli olacağı için $A_1, A_2, \dots, A_n$ katsayılarının hesaplanışını göstereceğiz. O eylem ispat yerine geçecektir. Bunun için yapılacak iş basittir. (29.15) ifadesinin sağ yanındaki terimlerin paydalarını eşitleyip ortak payda altında toplarız. Sağ tarafın payına

gelecek olan polinoma $S(x)$ dersek, (29.15) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} \tag{29.16}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan $P(x) \equiv S(x)$ olması gerektiği çıkar. Bu özdeşlikte eşit dereceli terimlerin katsayılarını eşitleyerek istenen $A_1, A_2, \dots, A_n$ katsayıları hesaplanabilir.

Katsayıları kolay hesaplamaya yarayan başka pratik bir yöntem de şöyledir: (29.15) eşitliğinin iki yanını herhangi bir $(x - a_j)$ ile çarpıp $x \to a_j$ iken limiti hesaplayalım: Her $(1 \le j \le n)$ için,

$$A_j = \lim_{x \to a_j} (x - a_j)\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a_j)}{(a_j - a_1)(a_j - a_2)\dots(a_j - a_n)} \tag{29.17}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte paydası $(x - a_j)$ olan terime karşılık gelen A_j katsayısı bulunmuş olur. Her $(1 \le j \le n)$ için bu eylem yapılırsa, $A_1, A_2, \dots, A_n$ katsayıları hesaplanmış olur. Bu işleme dikkat edersek, yapılan iş,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)} \tag{29.18}$$

eşitliğinin sağ yanında paydadaki $(x - a_j)$ çarpanını yok sayıp geride kalan ifadede x yerine a_j koymaktan ibarettir. Katsayıların hesaplanmasında bu oldukça kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

Örnekler: Bazen paydayı çarpanlarına ayırmak integral işlemini basitleştirir.

5.

$$\int \frac{x+4}{x^2 - 5x + 6}dx \tag{29.19}$$

integralini hesplamak için, ifadeyi basit kesirlerine ayıracağız.

$$\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} \tag{29.20}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \tag{29.21}$$

$$= \frac{Ax - 3A + Bx - 2B}{(x-2)(x-3)} \tag{29.22}$$

$$\Longrightarrow (A+B) = 1, \qquad -3A - 2B = 4 \tag{29.23}$$

$$\Longrightarrow a = -6, \quad B = 7 \tag{29.24}$$

olur. Buradan,

$$\int \frac{x+4}{x^2 - 5x + 6}dx = -6\int \frac{1}{x-2}dx + 7\int \frac{1}{x-3}dx \tag{29.25}$$

$$= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C \tag{29.26}$$

çıkar.

6.

$$\frac{x^2 + 1}{(x-2)(x+2)(x-5)}dx = \frac{A}{x-2} + \frac{A}{x+2} + \frac{A}{x-5}$$

$$= \frac{104}{84(x-5)} + \frac{35}{x-2} + \frac{15}{x+2}$$

yazılabilir. Buradan

$$\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)(x-5)}dx = \int \frac{104}{84(x-5)} + \int \frac{35}{x-2} + \int \frac{15}{x+2}$$
$$= \frac{1}{84}(104\ln|x-5| - 35\ln|x-2| + 15\ln|x+2| + C$$

bulunur.

7. Payın derecesi paydanınkinden büyükse, önce bölme işlemi yapılır, sonra yukarıdaki yönteme başvurulur:

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx$$

integralini hesaplamak için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^3-4}{x^2-x-2} = (x+2) + \frac{9x+2}{x^2-x-2}$$

olduğundan

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx = \int (x+2)dx + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \int \frac{9x+2}{x^2-x-2}dx$$

yazılabilir. Sağdaki integrali hesaplamak için,

$$\frac{9x+2}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$
$$\Longrightarrow A = \frac{7}{3},\ B = \frac{20}{3}$$

olduğu düşünülürse,

$$\int \frac{x^3-4}{x^2-x-2}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 + \frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C_2$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x + +\frac{7}{3}\ln|x+1| + \frac{20}{3}\ln|x-2| + C, \qquad (C = C_1 + C_2)$$

bulunur.

8.

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx = \int \left(1 + \frac{x+2}{x^3-x}\right)dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x}dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yandaki integral içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$
$$= \frac{A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ -A=2 \end{cases}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = -2,\ B = 3/2,\ C = 1/2$ bulunur. O halde,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx = x - 2\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$$
$$= x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

çıkar.

9. Paydanın bir yada iki dereceli bir çarpanı m kez tekrar ediyorsa, onu kesirlerine ayırırken söz konusu çarpan için, dereceleri 1 den m ye kadar değişen terimler eklenir.

Örnek 29.30.

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2}$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\frac{1}{x(x^2-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} A + B + \quad & = 0 \\ -2A - B + C & = 0 \\ A & = 1 \end{cases}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1,\ B = -1,\ C = 1$ bulunur. O halde,

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^2} = \int \frac{1}{x}dx \ - \int \frac{1}{x-1}dx \ + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$
$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

çıkar.

29.9.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa

Payda'da $ax^2 + bx + c$ gibi ikinci dereceden bir çarpan var ve $b^2 - 4ac < 0$ ise o çarpana ait gerçel kök yoktur. Basit kesirlere ayırırken ona ait terimi $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ biçiminde yazarız. Tabii, aynı düşünceyi

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx,\ \int \frac{x}{x^2+a^2}dx,\ \int \frac{1}{x^2-a^2}dx,\ \int \frac{x}{x^2-a^2}dx$$

tipi integrallerin hepsine uygulayabiliriz. Sonuçlar daima,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \tag{29.27}$$
$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C \tag{29.28}$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C \tag{29.29}$$
$$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C \tag{29.30}$$

formüllerine indirgenebilir.

Örnekler

1.

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3+x}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx = \int \left(\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} &= \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x-1)(x+1)} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A+B & =1 \\ C & =3 \\ A & =2 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=2,\ B=-1,\ C=3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^3+x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1} + 3\int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\tan^{-1}x + C\end{aligned}$$

çıkar.

2.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$$

integralini hesaplamak için, ifadeyi,

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \int \left(\frac{1}{(x-a)(x+a)}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi basit kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a)} + \frac{B}{x+a} \\ &= \frac{Ax+Aa+Bx-Ba}{(x^2-a^2} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A+B & =0 \\ Aa-Ba & =1 \end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/(2a),\ B = -1/(2a)$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}dx \\ &= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C\end{aligned}$$

çıkar.

3. Bazen uygun bir değişken değiştirimi ile payda'nın türevi paya eşitlenebilir.

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5 44x^3+x}dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx = \int \left(\frac{x^2+2}{x((2x^2+1)(2x^2+1)^2}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2} \\
&= \frac{A(4x^2+4x+1)+B(2x^4+x^2)+C(2x^3+x)+Dx^2+Ex}{4x^5+4x^3+x} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 4A+2B & =0 \\ 2C & 0 \\ 4A+B+D & =1 \\ A & =2 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=2$, $B=-4$, $C=0$ $D=-3$, $E=0$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx &= 2\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{xdx}{2x^2+1} - 3\int \frac{xdx}{(2x^2+1)^2} \\
&= 2\ln|x| - \int \frac{du}{u} - \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2}, \qquad (u=2x^2+1) \\
&= 2\ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C \\
&= 2\ln\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right) + \frac{3}{4}\ \frac{1}{2x^2+1} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

4.

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx$$

integralini hesaplamak için, integrali,

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1}\right)dx$$

biçiminde yazalım. Sağ yanda parantez içindeki ifadeyi kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \\
&= \frac{A(x^2-x+1)+B(x^2+x)+C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} A+B & =0 \\ -A+B+C & =0 \\ A+C & =1 \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 1/3,\ B = -1/3,\ C = 2/3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

çıkar.

29.10 *Alıştırmalar*

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\displaystyle\int \frac{3dx}{3x-4}$ 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-5x}$

3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\pi x-3}$ 4. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x-3}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$ 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-x^2}$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+2x-2}$ 8. $\displaystyle\int \frac{xdx}{3-x^2}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ 10. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-b^2x^2}dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+x}dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{1}{9x+x^3}dx$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2-6x+2}dx$ 4. $\displaystyle\int \frac{x}{2+6x+9x^2}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{9x^2-6x}$ 6. $\displaystyle\int \frac{1+x^3}{x^2+7x+12}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3-a^3}$ 8. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+2x^2+x^3}$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-3x^3}$ 10. $\displaystyle\int \frac{x}{1-x+x^2}dx$

Karma problemler

1. Aşağıdaki integral formüllerini doğruluğunu sağlayınız.

Örnek 29.31.

$$\int \frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Örnek 29.32.

$$\int \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}C$$

Örnek 29.33.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

Örnek 29.34.

$$\int \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2\tan x se^2 x + C$$

Örnek 29.35.

$$\int x(a^x)dx = \frac{a^x(\ln a - 1)}{\ln^2 a} + C$$

Örnek 29.36.

$$\int x(\sinh x)dx = x(\cosh x) + \sinh x + C$$

Örnek 29.37.

$$\int \sin\sqrt{x}dx = 2(\sin\sqrt{x} - 2\cos\sqrt{x} + C$$

Örnek 29.38.

$$\int \sin^{-1}(\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}(\sqrt{-(x-1)x} + \sin^{-1}(\sqrt{x}) + C$$

Örnek 29.39.

$$\int \tan^{-1}(\sqrt{x})dx = (x+1)tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C$$

Örnek 29.40.

$$\int x\ln x = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

2. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

Örnek 29.41.

$$\int \frac{x^2-5x-9}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \left\{\frac{1}{6}(-13\ln(x-1)+9\ln(x+1)+10\ln(x+2))\right\}+C$$

Örnek 29.42.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\\ &= \frac{A(x+2)^2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1}\\ &\Longrightarrow \begin{cases} A & = 4\\ A+B & = 3\\ B= & = 3-A=3-4=-1\\ C & = 3\end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A=4,\ B=-1,\ C=3$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{3dx}{(x+2)^2}\\ &= 4\ln|x-1|-\ln|x+2|+3\int(x+2)^{-2}dx+C\\ &= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|}+\frac{3(x+2)^{-1}}{-1}+C\\ &= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|}-\frac{3}{x+2}+C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 29.43.

$$\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} =$$

integralini hesaplamak için, integrali alınacak rasyonel fonksiyonu, kesirlerine ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\\ &= \frac{A(x+2)^2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1}\\ &\Longrightarrow \begin{cases} A & = 4\\ A+B & = 3\\ B= & = 3-A=3-4=-1\\ C & = 3\end{cases}\end{aligned}$$

çıkar. Son denklem sistemi çözülürse $A = 4,\ B = -1,\ C = 3$ bulunur.
O halde,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}dx &= \int \frac{4dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{3dx}{(x+2)^2} \\
&= 4\ln|x-1| - \ln|x+2| + 3\int (x+2)^{-2}dx + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} + \frac{3(x+2)^{-1}}{-1} + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^4}{|x+2|} - \frac{3}{x+2} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 29.44.

$$\begin{aligned}
\int (1-3x)^5 dx &\Longrightarrow t = 1-3x,\ dt = 3dx \\
&= \int t^5 (\frac{-1}{3}dt \\
&= \frac{-1}{3}\frac{1}{6}t^6 \\
&= \frac{-1}{18}(1-3x)^6 + C
\end{aligned}$$

Örnek 29.45.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\ln x+4)^3}{x}dx &\Longrightarrow t = \ln x + 4,\ dt = \frac{1}{x}dx \\
&= \int t^3 dt \\
&= \frac{1}{4}t^4 \\
&= \frac{1}{4}(\ln x+4)^4 + C
\end{aligned}$$

Örnek 29.46.

$$\begin{aligned}
\int a^x dx &\Longrightarrow t = a^x \Rightarrow t = e^{x\ln a}, \\
&= \int e^{x\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}e^{x\ln a} + C \\
&= \frac{1}{\ln a}a^x + C
\end{aligned}$$

Örnek 29.47.

$$\begin{aligned}
\int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &\Longrightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt, \\
&= 2\int a^t dt \\
&= \frac{2}{\ln a}a^t + C \\
&= \frac{2}{\ln a}a^{\sqrt{x}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 29.48.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{1+x^8}dx &\Longrightarrow t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3dt,\\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2}dt\\
&= \frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)+C
\end{aligned}$$

Örnek 29.49.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx \Longrightarrow \int \frac{du}{u} &= \ln|u| + C\\
&= \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}dx\\
&= \ln|\sin x + \cos x| + C
\end{aligned}$$

Örnek 29.50.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\cos^5 x}\ \sin x dx &\Longrightarrow t = \cos x,\ dt = -\sin x dx\\
&= -\int \sqrt{t^5}dt\\
&= -\int t^{5/2}dt\\
&= -\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}+C\\
&= -\frac{2}{7}(\cos^{\frac{7}{2}} x + C
\end{aligned}$$

Örnek 29.51.

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x-3}\ dx &\Longrightarrow t^2 = x-3,\ 2tdt = dx,\ x = t^2+3\\
&= \int (t^2+3)^3.t.(2tdt), \qquad [(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3]\\
&= 2\int (t^8+9t^6+27t^4+27t^2)dt\\
&= \frac{2}{9}t^9+\frac{18}{7}t^7+\frac{54}{5}t^5+\frac{54}{3}t^3+C\\
&= \frac{2}{9}(x-3)^{\frac{9}{2}}+\frac{18}{7}(x-3)^{\frac{7}{2}}+\frac{54}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+18(x-3)^{\frac{3}{2}}+C
\end{aligned}$$

Örnek 29.52.

$ekok\{4,\,5\} = 20 \Rightarrow t^{20} = x+1,\ 20t^{19}dt = dx,\ x = t^{20}-1$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{3+\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx &= \int \frac{3+\sqrt[4]{t^{20}}}{\sqrt[5]{t^{20}}}(20t^{19}dt\\ &= \int \frac{3+t^5}{t^4}(20t^{19})dt\\ &= 20\int\left(t^{20}+\frac{3t^{19}}{t^4}\right)dt\\ &= \frac{20}{21}t^{21}+\frac{15}{4}t^{16}+C\\ &= \frac{20}{21}(x+1)^{\frac{21}{20}}+\frac{15}{4}(x+1)^{\frac{4}{5}}+C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 29.53.

$u = x,\ dv = e^x dx,\ du = dx,\ v = e^x,\ \int u\,dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx\\ &= xe^x - e^x + C\\ &= e^x(x-1)\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 29.54.

$u = x^2,\ dv = e^x dx,\ du = 2xdx,\ v = e^x,\ \int u\,dv = u.v - \int v.du$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx\\ &= x^2e^x - 2e^x(x-1)+C\\ &= e^x(x^2-2x+2)+C\end{aligned}$$

bulunur.

29.11 Belirli İntegral Kuralları

Teorem 29.55. *$f(x)$ ile $g(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, $k \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ise, aşağıdaki bağıntılar vardır:*

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, *(k sabit sayı)*
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx, \quad (c \in (a,b)$
4. $\int_a^b kdx = k(b-a)$

5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

6. $\int_a^a f(x)dx = 0$,

7. $x \in [a,b]$ *ve* m, M *sabit sayılar olmak üzere* $m \le f(x) \le M$ *ise*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a<b)$

9. $x \in [a,b]$ *için* $f(x) \ge 0$ *ise* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

10. $x \in [a,b]$ *için* $g(x) \ge f(x)$ *ise* $\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$

Kanıtlar: Listede yazılı olan kuralları kanıtlayalım.

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Kanıt 1: f ve g fonksiyonları integrallenebilen iki fonksiyon ise $h = f \pm g$ nin de integrallenebilir olduğunu göstereceğiz. Bir P_n bölüntüsü için için Riemann toplamını yazarsak, $p_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ olmak üzere,

$$S(h, P_n) = \sum_{i01}^{n} h(p_i)\Delta x_i$$
$$S(f, P_n) = \sum_{i01}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$
$$S(g, P_n) = \sum_{i01}^{n} g(p_i)\Delta x_i$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} S(h, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} h(p_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(f(p_i) \pm g(p_i)\big)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

çıkar. Limit alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx &= \lim_{n\to\infty} \big(S(f, P_n) \pm S(g, P_n)\big) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \end{aligned}$$

bulunur. □

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, ($k$ sabit sayı)

Kanıt 2: Riemann integral tanımında $[a,b]$ aralığını n parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. Her $i = 1,2,\dots,n$ için $x_i^* \in [x_{i-1},x_i]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n kf(x_i^*)\Delta x_i \\ &= \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i \\ &= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i) \\ &= k\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx, \quad (c \in (a,b)$

Kanıt 3: $[a,c]$ arlığının bir bölüntüsü Q, $[c,b]$ aralığının bir bölüntüsü R olsun. Bu iki bölüntüsünün bileşimi $P = Q \cup R$ ile gösterelim. $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü P olacaktır. Riemann toplamları için

$$S(f,P) = S(f,Q) + S(f.R)$$

yazabiliriz. $(||Q|| \to 0) \wedge (||R|| \to 0) \Longleftrightarrow (||P|| \to 0)$ olduğundan

$$\lim_{||P||\to 0} S(f,P) = \lim_{||Q||\to 0} S(f,Q) + \lim_{||R||\to 0} S(f,R)$$

olur ki bu isteneni verir. □

4. $\int_a^b kdx = k(b-a)$

Kanıt 4: Bu kural Calculus'un Temel teoreminin bir sonucudur. Riemann integral tanımında $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ olur. Her $x \in [a]$ için $f(x) = k$ olsun.

$$\begin{aligned}\int_a^b k\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\,\delta x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n k\,\delta x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\,\delta x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n k\,\frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} n.k\,\frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} k\,(b-a)\end{aligned}$$

5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$

Kanıt 5: Riemann integral tanımında $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ olur.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

dir. $-\Delta x = -\frac{(a-b)}{n} = \frac{-(b-a)}{n}$ dir. Her $i = 1,2,\dots,n$ için $x_i^* \in [x_{i-1},x_i]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(\Delta x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{(b-a)}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{-(a-b)}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left[-\left(\frac{(a-b)}{n}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{(a-b)}{n}\right)\right]\\
&= -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(-\Delta x)\\
&= -\int_b^a f(x)dx
\end{aligned}$$

□

6. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Kanıt 6: Riemann integral tanımında $[a,a]$ aralığını n eşit parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(a-a)}{n} = 0$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(\Delta x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(0)\\
&= \lim_{n\to\infty} 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

7. $x \in [a,b]$ ve m, M sabit sayılar olmak üzere $m \le f(x) \le M$ ise

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Kanıt :

$$\begin{aligned}
m\int_a^b dx &= m(b-a) \qquad ((4)'den)\\
M\int_a^b dx &= M(b-a) \qquad ((4)'den)
\end{aligned}$$

□

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a<b)$

Kanıt 8: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ dir. f süreki lduğundan $|f|$ de sürekidir. Önceki kural uygulanırsa,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

çıkar.

9. $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Kanıt 9: f ntegrallenebilir ve $f(x) \geq 0$ ise $[a,b]$ aralığının bir P bölüntüsü için, $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere Riemann toplamı $S(f,P) = \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta x_i$ ve

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{||p||\to 0} S(f,P) \geq 0$$

çıkar.

10. $x \in [a,b]$ için $g(x) \leq f(x)$ ise $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

Kanıt 10: f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integralenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) \leq f(x)$ ise

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

olduğunu österelim. $g(x) \leq f(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0$ olur. 9.Kural uygulanırsa,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

elde edilir.

29.12 Sayısal İntegraller

Bir belirsiz integrali hesaplayınca sonouç birfonksiyon olur. Bir belirli integrali hesaplayınca sonuç bir sayı olur. Her şii durumda integralin gerçek değerini elde etmiş oluruz. İntegral hesaplarnda asıl amaç erçek değeri bulmktır. Ama bazı durumlarda integralin gerçek değerini bulamayız. O zaman integralin yaklaşık bir değerini bulmak isteriz. Bu eyleme, *sayısal integralleme* denilir. saısal interal hesabı içi geliştirilmiş matematiksel yöntmler bilisayar programlar haline getirilmiştir. bu tür programlarla, grçek değere şistenildiğikadar yaklaşık değerler bulunabilir. Burada yapılacak örnekler elle hesaplanacak kadar basit olacaktır.

29.13 Düzlemsel Eğrilerin Uzunluğu

Kendi kendisini kesmeyen sürekli bir C eğirisi düşünelim. Bu eğri $y = f(x), \quad a < x < b$ fonksiyonunun grafiği olsun. $[a,b]$ aralığının bir P bölüntüsü

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b \qquad (29.31)$$

olsun. $P_i = (x(t_i), y(t_i) = (x_i, y_i)$ $i = 0, 1, 2, \ldots n$ noktaları C eğrisi üzerindedir. Şimdi $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n$ noktalarını ardışık birleştiren çokgeni düşünelim. Bu çokgenin kenarları küçüldükçe, kenarlarının uzunlukları toplamı C yayının uzunluğuna yaklaşacaktır: Çokgenin kenar uzunlıkları toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

dir. Çokgenin kenar uzunluklarını Δt_i ile göstelim. $M = max\{\Delta t_i\}$, $i = 1, 2, , \ldots, n$ olmak üzere

$$L = \lim_{M \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

limiti varsa, C eğrisi ölçülebilir (rectifiable) denilir.

Fonksiyonun sürekli olması eğrisinin ölçülebilir olamsı için yeterli koşul değildir. O nedenle, fonksiyonun *sürekli türeve sahip olması* koşulunu koyacağız. Düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık formülünden

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{m \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

olduğunu gözönüne alırsak,

$$\begin{aligned}
x(t_i) - x(t_{i-1} &= x'(u_i)\Delta t_i \quad (t_{i-1} < u_i < t_i) \\
y(t_i) - y(t_{i-1} &= y'(v_i)\Delta t_i \quad (t_{i-1} < v_i < t_i)
\end{aligned}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\
&\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i]^2}\Delta t_i \\
L = &\lim_{M \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'_i(t)]^2 + [y'_i(t)]^2}\, dt
\end{aligned}$$

Çokgenin en uzun kenarının uzunluğu sıfıra yaklaşırken, yani $M \longrightarrow 0$ iken $u_i \to 0, v_i \to 0, n \to \infty$ olacağından

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\Delta t_i \\
&= \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt && (29.32) \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dt && (29.33) \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dt && (29.34)
\end{aligned}$$

çıkar. Bunlar C yayının uzunluğunu veren formüller olur.

Örnek 29.56. *Yarıçapı r olan çemberin uzuluğunu bulunuz.*

Çözüm:
Çemberin parametrik denklemi

$$x = rcost, \ y = rsint \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

dir. Buradan t parametreine göre türev alırsak,

$$\frac{dx}{dt} = rsint, \ \frac{dy}{dt} = -rcost \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

olur. (41.2)'nin ilk formülünden

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2i} \sqrt{(-rsint)^2 + (rcost)^2}\, dt \\ &= r\int_0^{2i} \sqrt{sin^2 t + cos^2 t}\, dt \\ &= r\int_0^{2i} dt \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik çemberin uzunluk formülü olarak kullanılablir:

$$L = 2\pi r \tag{29.35}$$

Örnek 29.57. *Parametric denklemi*

$$x = rcos^3 t, \ y = rsin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$$

olan astroidin yay uzuluğunu bulunuz.

Çözüm:
(41.2)'nin ilk formülünü kullanalım:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

Bu formülü kullnabilmek için

$$\frac{dx}{dt} = -3acos^2 tsint, \ \frac{dy}{dt} = -3asin^2 tcost$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 9a^2(cos^4 tsin^2 t + sin^4 cos^2 t) \\ &= 9a^2 cos^2 tsin^2 t(cos^2 t + sin^2 t) \\ &= 9a^2 cos^2 tsin^2 t \end{aligned}$$

değri (41.2) formülünde kullnılarsa,

$$\begin{aligned} L = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} costsint\, dt \\ &= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} costsint\, dt \\ &= -3acos2t|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6a \end{aligned}$$

30 İntegral Alma teknikleri

30.1 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa

Bir fonksiyonun integralini almak demek, o fonsiyonu türev kabul eden fonksiyonları bulmak demektir. Öyleyse, işin esası (f, f') (fonkion-türevi) eşleşmesidir. Bir fonksiyonun sonsuz çokluktaki belirsiz integralleri (ilkelleri) birer sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğuna göre, sabiti ihmal ederek(f, f') eşleşmesini bire bir imiş gibi görebiliriz. Bunu tam natematiksel yöntemi, türevi aynı olan fonksiyonları bir denklik sınıfı içine almaktır. Ancak, sözünü ettiğimiz basit kavramı açıklamak için o kadar ileri gitmeye gerek yoktur.

Calculu'ta türev alma kuralları integral alma kurallarından daha yeteneklidir. Türevi olan her fonksiyonun türevini bulmamızı sağlar. Ama bu kesimde göreceğimiz gibi, integral alma kurallarımız çok yetenekli değildir. Bir fonksiyonun integralinin varlığını biliyor olsak bile, bazen o integrali bulamayabiliriz. Bunun tipik örneği $\int e^{x^2} dx$ integralidir. integrand sürekli olduğu için, integralin varlığını biliyoruz, ama e^{x^2} fonksiyonunu türev olarak kabul eden fonksiyonu bilmiyoruz.

İntegral alma eyleminde genel sayılacak tek kural, integrandı türev kabul eden fonksiyonun bulunması eylemidir. Bu eylem sonuç olarak (f, f') eşleşmesine indiregenir. Bütün integral alma yöntemleri sonunda (f, f') eşleşmesini kullanır. O nedenle ne kadar çok fonksiyonun türevini biliyorsak, ters işlemi, yani türevden ilkel fonksiyonu bulma eylemini de o kadar biliyor oluruz. Bunun için türev alma kuralları bize çok bilgi veriyor. Sabitler, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, ters fonksiyonlar gibi bir sınıflandırmayla pratikte çok kullanılan fonksiyonların türevlerini listeleyebiliyoruz. Oradan ters dönüşüm yaparak (f, f') eşleşmesine dönebiliriz.

Genel geçerliği olan yöntem olmadığı için, fonksiyonları alt sınflara ayırıp, her sınıf için geçerli olan integral alma yöntemlerini ortaya koyacağız. Yukarıda da söylediğimiz gibi, alt sınıflara bölme sorunu tam çözmüyor. Ama oldukça iyi sonuçlar veriyor. Bilmemiz gereken şey, hangi alt sınıfta hangi yöntemi kullanıyorsak kullanalım, sonuçta (f, f') eşleşmesini kurabilirsek integrali çözmüş oluyoruz.

Doğal olarak, alt sınıflarda integral alırken bazı kurallar ortaya çıkıyor. Onları birer alet (fomül) olarak kullanıyoruz. O aletler çok işimize yarar.

Alt sınıflara bölme eylemi için de genel geçerliği olan yöntemden söz edilemez. Ama tarih boyunca sınama-yanılma yöntemiyle ortaya çıkarılan bazı sınıflar oldukça standart sayılır. Bu kesimde onları ele alacağız. Yine de ele aldığımız alt sınıfların tam bir liste oluşturmadığını bilmeliyiz. Öyle olsa bile, öğrenciye bir yol haritası verebilmek için integrak teknikleri diye adlandıracağımız büyük sınıfın başlıca alt sınıflarını sıralamak uygun olacaktır.

1. İlkeli bilinen fonksiyonlar
2. sabit foksiyonlar
3. Polinomlar
4. Rasonel Fonksiyonlar
5. Rasyonelleştirme
6. Değişken değiştirme
7. Kısmi İntegrasyon
8. Trigonometrik Fonksiyonlar
9. Ters Trigonometrik fonksiyonlar
10. Hiperbolik Fonksiyonlar
11. ers hiperbolik fonksiyonlar
12. Köklü ifadeler

30.2 *İntegral Alma Yöntemeleri*

$f(x)$ fonkiyonunun belirsiz integrali türevleri $f(x)$ olan bütün fonkiyonlardır. Belirsiz integral

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C \qquad (C sabit) \tag{30.1}$$

simgesiyle gösterilir. Belirsiz denmesinin nedeni, $F(x)$ fonksiyonu türev kabul eden fonksiyonların sonsuz çoklukta oluşu ve hangisinden söz edildiğinin belli olmayışıdır. Sonsuz çoklukta olan belirsiz integraller birer sabit farkıyla birbirlerine eşittitler. Bu demektir ki, $F(x)$ ile $G(x)$ fonksiyonları $f(x)$ fonksiyonuun belirsiz integrali iseler

$$f(x) - G(x) = K \qquad (K sabit) \tag{30.2}$$

olur.

$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integraline *ilkel* (primitive), *ters türev* gibi adlar da verilir. Yalınlığı nedeniyle *ilkel* terimini tercih ediyouz. Ama öteki terimleri de, konuya açıklık getirmek gerektiğinde, eş anlamlı olarak kullanacağız.

(25.1) ifadesinde C sabiti sayısal her değeri alabilir. Dolayısıyla $F(x)$ fonksiyonunun sonsuzçoklukta belirsiz integrali vardır. Gerçel fonksiyonlarda çalışıyorsak, (25.1) belirsiz integralleri bütün düzlemi doldurur. Yani düzlemin her noktasından geçen bir ve yalnızca bir tane belirsiz integral vardır. Aynı fonksiyonun belirsiz integralleri kesişmezler.

30.3 Değişken Değiştirme

Belirsiz integral alırken, genellikle ilkel fonksiyonu hemen göremeyiz O durumlarda, uygun bir değişken değiştirme (yerine koyma) ile integrali bilinen bir biçeme sokarız. Bunu yaptıran kural şudur.

Teorem 30.1. *$f(u)$ süreki ve $u(x)$ sürekli türevi var olan bir fonksiyon ise*

$$f(u(x)u'(x)\,dx = \int f(u)\,du\Big|_{u=u(x)} \tag{30.3}$$

Sağ yandaki terimin anlamı açıktır. $\int f(u)du$ integrali bulunduktan sunra $u = u(x)$ konularak asıl x değişkenine dönülür.

İspat:

$F(x)$ fonksionu $f(x$ fonksiyonunun ilkeli olsun. F nin varlığı f nin sürkliliği ile garanti edilir. Bkz (25.1). Zincir kuralı gereğnce,

$$\frac{d}{dx}F'(u(x)) = F'(u(x))u'(x)$$

yazabiliriz. Öyleyse,

$$\begin{aligned}\int f(u(x))u'(x)\,dx &= \int F'(u(x))u'(x)\,dx \\ &= f(u(x)) + C \quad (C \text{ sabit})\end{aligned}$$

Son iki ifadeden, aranan (25.2) eşitliği çıkar.

Değişken değiştirmede, integranddaki (integral işareti altındaki ifade) asıl değişkenin yerine hangi değişkenin konulacağını söyleyen genel bir yöntem yoktur. Bu eylem integrali alanın deneyimine bağlı bir tür sınama-yanılma sürecidir. İntegral kavramı ortaya çıktığından beri çok sayıda sınama-yanılma yapılmış ve başarılı olanlar öne çıkmıştır. Aslında bütün integral alma eylemleri öyledir. Genel yöntem ortaya konamayınca, problem alt sınıflara bölünür ve her bir alt sınıfta geçerli olan çözüm yolları ortaya konulur.

Değişken değiştirme ya da yerine koyma diye bilinen bu kural oldukça geneldir. Hemen her sınıf integrale uygulanabilem tek yöntemdir. O nedenle, ilkeli bilinen fonksiyonlardan sonra en çok kullanılan yöntemdir. Bu kesim boyunca *rasyonel, köklü, trigonometrik, logaritmik, üstel, hiperbolik* fonksiyon sınıfları gibi farklı fonksiyon sınıflarına uygulanışını göreceğiz.

Örnek 30.2.

$$\int sin^3 x.cosx\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = sinx \longrightarrow du = cosxdx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int sin^3 x.cosx\,dx &= \int u^3 du \\ &= \frac{1}{4}u^4 \\ &= \frac{1}{4}sin^4 x + C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 30.3.

$$\int sin^3 x\,dx$$

integralini hsaplayınız.

Çözüm: Burada ilk örnekteki değişken değiştirme, integrandın ilkelini bulmaya yarayacak iyi bir sonuç vermez. Trigonometrk formülleri kullanarak biraz işlem yaparsak, $u = cosx \to du = -sinx$ konumunun daha iyi sonuç vereceği görülebilir:

$$\begin{aligned}
\int sin^3 x\,dx &= \int (sin^2 x) sinx\,dx \\
&= \int (1 - cos^2 x) sinx\,dx \\
&= \int sinxdc - \int cos^2 x sinx\,dx \\
&= -cosx + \int u^2\,du \\
&= -cosx + \frac{1}{3} cos^3 x + C \\
&= \frac{1}{4} u^4 \\
&= \frac{1}{4} sin^4 x + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 30.4.

$$I = \int (1-2x)^9 x\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu integrali hesaplamak için akla ilk gelen yol, istegrandı binom formülüne göre açmak, sonra çıka polinomu terim terime integre etmektir. O yöntem doğru ama uzun bir yöntemdir. Onun yerine $u = 1-2x$, $du = -2dx$ konumu işlemleri çok kısaltacaktır:

$$\begin{aligned}
\int (1-2x)^9 x\,dx &= -\frac{1}{2} \int (1-2x)^9 (-2dx) \\
&= -\frac{1}{2} \int (u)^9 (du) \\
&= -\frac{1}{20} u^{10} + C \\
&= -\frac{1}{20} (1-2x)^{10} + C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 30.5.

$$I = \int_{+3}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

İntegrali alınacak ifadeyi karekökten kurtarmak için

$$x = \frac{3}{\cos t}, \; dx = 3\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$$

ve sınırlar için,

$$2\sqrt{3} = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow t = \frac{pi}{};+3 = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow T = 0$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} . \frac{3\sin t}{\cos^2 t} dt \\
&= \int_0^{\frac{pi}{6}} \frac{\cos t}{3\sin t} . \frac{3\sin t}{\cos^2 t} dt \\
&= \int_0^{\frac{pi}{6}} \frac{dt}{\cos t} \\
&= \int_0^{\frac{pi}{6}} \sec t\, dt \\
&= ln|\sec t + \tan t|_0^{\frac{pi}{6}} \\
&= ln\left|\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right| - ln|1+0| \\
&= ln\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Örnek 30.6.

$$I = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekök ile küp kökü yoketmek için 2 il 3 sayılarının ek küçük ortak katını (ekok) alalım.

$$x = t^6,\ \sqrt{x} = t^3,\ \sqrt[3]{x} = t^2,\ dx = 6t^5\, dt$$

konumuyla

$$I = 6\int \frac{t^8}{t^2 - 1} dt$$

$$\frac{t^8}{t^2-1} = t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}$$

$$\begin{aligned}
I &= 6\int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt \\
&= 6\left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C \\
&= 6\left(\frac{x^{7/6}}{7} + \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + x^{1/6} + \frac{1}{2}\left|\frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1}\right|\right) + C
\end{aligned}$$

Örnek 30.7.

$$I = \frac{x^4}{x^2+1} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: payın drecesi paydanın derecesnden küçük olmadığı için, önce payı paydaya bölmeliyiz.

$$
\begin{aligned}
I &= \int dx - \int 2dxx^2+1 + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\
&= x - 2arctanx + \left(\frac{1}{2}arctanx + \frac{x}{x^2+1}\right) + C
\end{aligned}
$$

Örnek 30.8.

$$
I = \frac{dx}{x^2+1}dx
$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = tant$, $dx = \sec^2 t dt$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sec^2 t}{(\tan^2 t+1)^2} \\
&= \int \cos^2 t dt \\
&= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t . \cos t + C \\
&= \frac{1}{2}\left(arctanx + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right) + C
\end{aligned}
$$

30.4 $\tan\frac{\theta}{2}$ *Konumu*

Bazı integrallerde değişken değiştirimi işi kolaylaştırır. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
x &= \tan\frac{\theta}{2} \\
\cos\theta &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\
\sin\theta &= \frac{2x}{1+x^2} \\
d\theta &= \frac{2dx}{1+x^2} \\
\theta &= \arctan x \\
x &= a\sin\theta \Leftrightarrow \theta = arc\sin\frac{x}{a} \\
x &= a\tan\theta \Leftrightarrow \theta = arc\tan\frac{x}{a} \\
x &= asec\theta \Leftrightarrow \theta = arcsec\frac{x}{a} = arccos\frac{x}{a}
\end{aligned}
$$

değişken değiştirimleri kullanılabilir.

Örnek 30.9.

$$
I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}dx
$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
x = \tan\frac{\theta}{2}, \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}, d\theta = \frac{2dx}{1+x^2}
$$

konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}} \\
&= \int \frac{2x}{2x+2} \\
&= \int \frac{dx}{x+1} \\
&= \ln|x+1| \\
&= \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}+1\right|_0^{\pi/2} \\
&= \ln 2 - \ln 1 \\
&= \ln 2
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 30.10.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\sin t, dx = \frac{1}{2}\cos t\,dt, 1-4x^2 = 1-4\frac{1}{4}\sin^2 t = 1-\sin^2 t \\
&= \cos^2 t, 2x = \sin t, t0\arcsin(2x)
\end{aligned}
$$

konumu yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{(1/2)\cos t}{\cos t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}t + C \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(2x) + C
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 30.11.

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 t}{\cos t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{(1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos t}\,dt - \frac{1}{4}\int \cos t\,dt \\
&= \ln|secx + tanx| + C
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 30.12.
$$I=\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x=3\sin t, dx=3\cos t\,dt, 9-x^2=9\cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx\\
&=\int \frac{9\cos^2 t}{3\cos t}\,dt\\
&=3\int \cos t\,dt\\
&=3\sin t+C\\
&=3\arcsin\frac{x}{3}+C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 30.13.
$$I=\int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$x=\frac{1}{2}\sin t, dx=\frac{1}{2}\cos t\,dt, 1-4x^2=\cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx\\
&=\int \frac{\frac{1}{2}\cos t}{\frac{1}{2}\sin t.\cos t}\,dt\\
&=\int \frac{dt}{\sin t}\\
&=\int \sec t\,dt\\
&=\frac{sec t(\sec t+\tan t)}{\sec t+\tan t}
\end{aligned}$$

$$u=\sec t+\tan t, du=\sec t\tan t+\sec^2 t=\sec t(\sec t+\tan t)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{du}{u}\\
&=\ln|u|+C\\
&=\ln|sect+tant|+C
\end{aligned}$$

$$x=\frac{1}{2}\sin t \Rightarrow 2x=\sin t \Rightarrow \sec t=\frac{1}{2x}$$

konumuyla,
$$I=\ln\left|\frac{1}{2x}+\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right|+C$$

bulunur.

Örnek 30.14.
$$I=\int\frac{\sin^5}{\sqrt{\cos x}}dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$u=\cos x,\quad du=-\sin x\,dx$$
konumuyla,
$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sin^5}{\sqrt{\cos x}}dx\\&=\int\frac{(1-u^2)^2}{\sqrt{u}}\\&=-\int(u^{\frac{7}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{-\frac{1}{2}})du\\&=-\frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}}+\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}+C\\&=-\frac{2}{9}(\cos x)^{\frac{9}{2}}+\frac{4}{5}(\cos x)^{\frac{5}{2}}-2(\cos x)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

30.5 *Kısmi İntegrasyon*

İntegrali alınacak fonksiyonun ilkeli hemen görülemiyor, değişken değiştirimi için uygun bir değişken bulunamıyor ise kısmi integrasyon denilen yöntem bazen çözüm için uygun yol olabilir. Bu yöntem aslında iki fonksiyonun çarpımının türevine dayalıdır:
$$\int u\,dv \tag{30.4}$$
integralini arıyor olalım. uv çarpımının diferensiyeli olan
$$d(uv)=u\,dv+v\,du$$
eşitiğinin iki yanının integralleri de eşit olmalıdır:
$$uv=\int u\,dv+\int v\,du$$
Buradan
$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \tag{30.5}$$
bağıntısı çıkar. Bu aradığımız (25.5) integralidir. Bundan böyle (25.6) eşitliğini bir formül olarak kullanacağız. Bu yöntem öncelikle integrali alınacak fonksiyonun $uv\,dx$ biçiminde yazılabilmesini ve bir ya da ardışık kısmi integrasyon uygulamalarınad u çarpanının yok olmasını gerektirir. Aşağıdaki örnekler, kısmi integrasyon yönteminin nasıl çalıştığını gösterecektir.

Örnek 30.15.
$$I=\int cosx\,dx, \tag{30.6}$$
interalini bulunuz.

Çözüm: $u=x,\quad dv=\cos x dx\Rightarrow du=dx,\quad v=\sin x$ konumuyla,
$$I=\int cosx\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$$
bulunur.

Uyarı 30.16. *Kısmi integrasyonda u ve v fnksiyonlarının uygun seçilmesi önemlidir. Yapılan konum, integraldeki zorluğu (karmaşayı) yok edecek yönde olmalıdır. Bu beceri ancak deneyimle kazanılabilir.*

Örneğin, yukarıdaki örnekte zorluğu yaratan x çarpanıdır. Değişken konumu, yukarıda yaptığımız gibi onu yoketmeye yönelik olmalıdır. Tersine $u = \cos x, \quad dv = xdx$ seçimi yapılsaydı,

$$I = \int cosx\, dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}(-\sin x)\, dx$$

çıkardı ki bu eylem x değişkenini yoketmiyor, kuvvetini artırıyor.

Örnek 30.17.

$$\int xe^x\, dx \tag{30.7}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

İntegrandı iki fonksiyonun çarpımı biçimine getirelim: $u = x$, $dv = e^x dx$ konumuyla,

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx$$

$$= xe^x - e^x + C \qquad\qquad = e^x(x-1) + C$$

Uyarı: Yukarıdaki değiken değiştirme eyleminde $u = e^x$, $dv = x\,dx$ alınmış olsaydı

$$\int xe^x\, dx = \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{1}{2}\int x^2e^x dx$$

gibi çözümü aslından daha zor olan bir integral ortaya çıkardı. O nedenle, kısmi integrasyon kullanılırken, işlem sonunda çarpanlardan birisinin yok olması önem kazanır.

Örnek 30.18.

$$\int cosxe^{-x}\, dx \tag{30.8}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Türev ve integral işlemlerinde e^{-x} yokolmayacağına göre $cosx$ fonksiyonu yokolması gereken fonksiyon olarak karşımıza çıkar.Tabii, bu fonksiyon da bir kez türev ya da integral larak yok edilemez. Ama iki defa türev alınca, kendisine eşit olacağından, bir aritmetik işlemle istenen integrali elde edebiliriz:

$$\int cosxe^{-x}\, dx = sinxe^{-x} + \int sinxe^{-x}\, dx$$

Sondaki integrale tekrar kısmi integral uygularsak,

$$\int sinxe^{-x}\, dx = sinxe^{-x} - \int cosxe^{-x}\, dx$$

çıkar. Son iki ifadeyi bir araya getirisek,

$$\int \cos xe^{-x}\, dx = \sin xe^{-x} - \cos xe^{-x} - \int \cos xe^{-x}\, dx \tag{30.9}$$

Dikkat edersek, son ifadedeki iki integral aynıdır. Dolayısıyla, eşitliği

$$\int \cos xe^{-x}\, dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C \tag{30.10}$$

biçiminde yazabiliriz.

Örnek 30.19.

$$\int (3x+5)\cos\frac{x}{4}\,dx \tag{30.11}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Kısmi integrasyon uygularken polinom biçimindeki fonkiyonların ilk adımda ya da ardıiık adımlarda yok olacağını düşünerek,

$u = 3x+5,\ dv = \cos\frac{x}{4},\ du = 3dx,\ v = 4sin\frac{x}{4}$

konumlarını yapabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned}\int (3x+5)\cos\frac{x}{4}\,dx &= 4(3x+5)\sin\frac{x}{4} - 12\int \sin\frac{x}{4}\,dx\\ &= 4(3x+5)\sin\frac{x}{4} + 48\cos\frac{x}{4} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 30.20.

$$\int x^2\sin(10x)\,dx \tag{30.12}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = x^2,\ dv = \sin(10x)dx,\ du = 2xdx,\ v = -\frac{1}{10}\cos(10x)$

konumu yapılırsa,kısmi integrasyon formülünden

$$x^2\sin(10x)dx = -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\int x\cos(10x)dx$$

yazılabilir. Sğdaki integral için bir kez daha kısmi integrasyon uygulnabilr:

$u = x,\ dv = \cos(10x),\ du = dx,\ v = \frac{1}{10}\sin(10x)$

konumuyla,

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(10x)\,dx &= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}\sin(10x) - \frac{1}{10}\int sin(10x)dx\right)\\ &= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}\sin(10x) + \frac{1}{100}\cos(10x)\right) + C\\ &= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{x}{50}\sin(10x) + \frac{1}{500}\cos(10x) + C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 30.21.

$$I = \int_0^1 \arctan x\,dx, \tag{30.13}$$

interalini bulunuz.

Çözüm: Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned}I &= \int \arctan x\,dx\\ &= x\arctan x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_0^1 \qquad = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Örnek 30.22.

$$I = \int e^{ax}cosbx\,dx, \qquad (ab \neq 0) \tag{30.14}$$

interalini bulunuz.

Çözüm:

$$u = e^{ax}, du = ae^{ax}dx, dv = \cos bx, dxv = \frac{1}{b}\sin bx$$

konumuyla Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{ax} cos bx\, dx \\
&= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\, dx \\
&= \frac{1}{b}c\sin bx - \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I + C
\end{aligned}$$

Burdan

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}\frac{a}{b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

bulunur.

Benzer olarak

$$I = \int e^{ax}\sin bx\, dx, = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

eşitliği elde edilebilir.

Örnek 30.23.

$$I = \int_1^2 \ln x\, dx \tag{30.15}$$

interalini bulunuz.

Çözüm: Burda ilkeli bilinmeyen fonksiyon $\ln x$ dir. Öyleyse kısmi integrasyonda seçilecek konumlar onu yokedek biçimde olmalıdır. $u = \ln x, dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}, v = x$ konumu yapılırsa $\ln x$ ilk adımda yok olur:

$$I = \int_1^2 \ln x\, dx = x\ln x|_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\, dx = 2\ln 2 - 1$$

Örnek 30.24.

$$I = \int_1^2 \sin^{-1} x\, dx \tag{30.16}$$

interalini bulunuz.

Çözüm: $u = arc\sin x, dv = dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
I = \int_1^2 \sin^{-1} x\, dx &= x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= xarc\sin x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= xarc\sin x + \frac{1}{2}2\sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

Örnek 30.25.

$$I_1 = \int e^x \sin x\, dx \tag{30.17}$$

interalini bulunuz.

Çözüm:$u = e^x, dv = \sin x \Rightarrow du = e^x dx, v = -\cos x$ konumuyla,

$$I_1 = \int e^x \sin x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

elde edilir. Ortaya çıkan ifadede integrandın ilkelini hemen göremiyoruz. O nedenle tekrar kısmi integrasyon yöntemine başvuralım:

$$s = e^x, dw = \cos x\,dx \Rightarrow ds = e^x\,dx, w = \sin x$$

konumuyla,

$$I_2 = \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

Bu eşitliğin en sağındaki terim bizim aradımız interaldir. Onu çekip asıl ifadede yerne koyarsak,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int e^x \sin x\,dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \end{aligned}$$

Buradani

$$\begin{aligned} 2I_1 &= 2\int e^x \sin x\,dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x \\ &= e^x(\sin x - \cos x) + C \end{aligned}$$

çıkar.

30.6 *Logaritmik integraller*

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

biçeminde olan ya da bu biçeme dönüştürülebilen integralleri hesaplayabiliriz.

Örnek 30.26.

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x}\,dx \tag{30.18}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x}\,dx \qquad e^{-x} \text{ ile pay ve paydayı çarp}$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx \qquad u = e^{-x}, du = -e^{-x}dx) \qquad = -\int \frac{du}{u} + C = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|e^{-x}+1| + C \qquad ((e^{-x}+1) > 0) \qquad = -\ln(e^{-x}+1) + C$$

Örnek 30.27.

$$I = \int \frac{dx}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt \tag{30.19}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{t^{\frac{1}{3}}+t^{\frac{1}{2}}}\,dt \qquad [ekok(2,3)06 \Rightarrow u = t^1 6, 6u^5 du = dt] \\
&= \int \frac{6u^5 du}{u^2+u^3} \\
&= \int \frac{6u^5 du}{u^2(1+u)} \\
&\int (6u^2 - 6u + 6 + \frac{6}{1+u} du \\
&= 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln|1+u| + C \\
&= 2t^{\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{3}} + 6t^{\frac{1}{6}} - 6\ln(1+t^{\frac{1}{6}}) + C \quad (1+t^{\frac{1}{6}}) > 0
\end{aligned}
$$

Örnek 30.28.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \tag{30.20}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sinh-1x\Big|_0^1 \\
&= \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_0^1 \\
&= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 \\
&= \ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

Örnek 30.29.

$$I = \int \frac{dx}{9-x^2}\,dx \tag{30.21}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{9-x^2}\,dx \frac{1}{3}\coth^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)_4^6 \\
&= \frac{1}{3}\coth^{-1}2 - \frac{1}{6}\coth^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{2+1}{2-1} - \frac{1}{6}\ln\frac{4+1}{4-3} \\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{3}{7}
\end{aligned}
$$

30.7 *Köklü İfadelerin İntegrali*

Köklü ifadelerin integrali için kullanılan geçerli yönten, integradı kökten kurtaracak uygun bir dğişken değiştirimi yapmaktır. Dolayısıyla bu kesimi () kesimi içinde görmek daha doğrudur. Bir kaç örnek söylediğimiz kanıtlayacaktır.

Örnek 30.30.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\pi+2x}}\,dx \tag{30.22}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Burada zorluğu yaratan terim kareköklü terimdir. Karkökten kurtulmak için uygun bir değişken değiştirimi bulmalıyız. Deneyerek $u = \pi + 2x$, $2udu = 2dx \Rightarrow dx = udu$ konumunun işe yaradığını görebiliriz:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\pi+2x}}\,dx &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}}\\ &= \int \frac{udu}{u}\\ &= \int du\\ &= u + C\\ &= \sqrt{\pi+2x} + C\end{aligned}$$

Örnek 30.31.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx \tag{30.23}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekökten kurtulmak için, $u^2 = 3x - 1$, $x = \frac{1}{3}(u^2+1)$, $2udu = dx$, $dx = \frac{2}{3}udu$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx &= \frac{2}{9}\int \frac{(u^2+1)}{u^2}udu\\ &= \frac{2}{9}\int udu + \frac{2}{9}\int \frac{du}{u}\\ &= \frac{1}{9}u^2 + \frac{2}{9}ln|u| + C\\ &= \frac{1}{9}(3x-1) + \frac{2}{9}ln|\sqrt{3x-1}| + C\end{aligned}$$

Örnek 30.32.

$$\int \left(x^2 - 4x + 4\right)^{-\frac{5}{3}}\,dx \tag{30.24}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Uygun bir değişkn değiştirimi ile küp kökten kurtulmalıyız. Bunun için küp köklü ifadenin içinin $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ olduğunu görelim. Sonra

$u^3 = (x-2)$, $3u^2du = dx$, $(x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{\frac{10}{3}}$

konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \left(x^2-4x+4\right)^{-\frac{5}{3}}\,dx &= \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2-4x+4})^5}\,dx\\ &= \int \frac{3u^2}{u^{10}}\,du\\ &= -\frac{3}{7}u^{-7} + C\\ &= -\frac{3}{7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C\end{aligned}$$

Örnek 30.33.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \tag{30.25}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u^2 = x$, $2udu = dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx &= \int \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= 2Arcsinu + C \\ &= 2Arcsin\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 30.34.

$$I = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}2x^2-6x+4 = 2(x^2-3x)+4 &= 2(x^2-3x+\frac{9}{4})+4-\frac{9}{2} \\ &= 2(u^2-a^2) \\ u &= x-\frac{3}{2} \\ a &= \frac{1}{2} \\ du &= dx \\ x+1 &= u+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{(u+\frac{5}{2})du}{\sqrt{2(u^2-a^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2)}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int z^{-1/2}dz &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{2}z^{1/2} + C_1 \\ &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + C_1\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}} ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C_2$$

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2 \\ &= \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} ln\left|x+\frac{-3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right| + C\end{aligned}$$

Örnek 30.35.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = a\cos^u + b\sin^2 u$$

$$dx = (-2a\cos u.\sin u + 2b\sin u\cos u)\, du$$

$$2\sin u\cos u(b-a)\, du$$

$$= (b-a)\sin 2u\, du(x-a \qquad = a(\cos^2 u - 1) + b\sin^2 u = (b-a)\sin^2 u$$

$$(b-x) = b((1-\sin^2 u) - a\cos^2 u = (b-a)\cos^2 u$$

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin u\cos u$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\, dx \\ &= \int \frac{(b-a)\sin 2u}{(b-a)\sin u\cos u}\, du \\ &= 2\int du \\ &= 2u + C \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{b-a}{b-a}\tan^2 u \Rightarrow u = \arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

değeri kullanılarak.

$$I = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C$$

bulunur.

Örnek 30.36.

$$I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = 2\tan t, dx = 2(1+\tan^2 t)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{(\pi/2)} \frac{1}{\sqrt{4(1+\tan^2 t)}}(1+\tan^2 t)2dt \\ &= \int \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\frac{2}{\cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t(sec t + \tan t)}{(sec t + \tan t)}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t\tan t + \sec^2 t}{(sec t + \tan t)}\, dt \\ &= \int \frac{du}{u} \qquad (u = \sec t + \tan t) \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|sec t + \tan t| + C \\ &= \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

Örnek 30.37.

$$I=\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x=\sqrt{3}\tan t, dx=\sqrt{3}\sec^2 t\,dt$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\,dx\\
&=\int\frac{\sqrt{3}sec^2 t}{3\tan^2 t\sqrt{3}\sec t}\,dt\\
&=\frac{1}{3}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt\\
&=\frac{1}{3}\int(\sin^2 t)d(\sin t)\\
&=-\frac{1}{3}\frac{1}{\sin t}+C
\end{aligned}$$

Örnek 30.38.

$$I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x=\frac{2}{\cos t}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx\\
&=\int\frac{\frac{2\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{2}{\cos t}\cdot\frac{2\sin t}{\cos t}}\,dt\\
&=\frac{1}{2}\int dt\\
&=\frac{1}{3}t+C\\
&=\frac{1}{3}\arccos(\frac{2}{x})+C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{1}{\sqrt{\pi+2x}}\,dx\\
&=\int\frac{udu}{\sqrt{u^2}}\\
&=\int\frac{udu}{u}\qquad(u^2=\pi+2x, 2udu=2dx, dx=udu)\\
&=u+C\\
&=\sqrt{\pi+2x}+C
\end{aligned}$$

$$\int(1-2x)^9dx=-\frac{1}{2}\int(1-2x)^9(-2dx)=-\frac{1}{20}(1-2x)^{10}+C$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx \\
&= \frac{2}{9}\int \frac{(u^2+1)}{u^2}\,du \qquad (u^2 = 3x-1) \\
&= \frac{2}{3}\int u\,du + \frac{2}{9}\int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{3}(3x-1) + \ln\sqrt{3x-1} + C
\end{aligned}
$$

Örnek 30.39.

$$I = \int (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$(x^2-4x+4) = (x-2)^2,\ u^3 = x-2,\ 3u^2\,du = dx,\ (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{\frac{-10}{3}}$$

konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I &= \int (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}}\,dx \\
&= \int \frac{3u^2}{u^{10}}\,du \\
&= -\frac{3}{7}u^{-7} \\
&= -\frac{3}{7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C
\end{aligned}
$$

Örnek 30.40.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u^2 = x$ konumuyla,,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx \\
&= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \int \arcsin u + C \\
&= 2\arcsin\sqrt{x} + C
\end{aligned}
$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} + C \tag{30.26}$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C \tag{30.27}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{-3x}-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|e^{3x}-1| + C \tag{30.28}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}(1+e^{-\sqrt{x}})}\,dx = 2\int \frac{du}{1+e^{-u}} = 2\int \frac{e\hat{u}du}{1+e^{u}} = \ln(e\hat{u}+1) + C \tag{30.29}$$

$$\int \frac{2^x}{4^x+1}\,dx = \int \frac{1}{\ln 2} \int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \frac{\sinh^{-1}(2^x)}{\ln 2} = \frac{\ln(2^x+\sqrt{4^x+1}}{\ln 2} + C$$

$$\int \frac{\sinh\sqrt{x}.\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sinh^2\sqrt{x} + C \tag{30.30}$$

31 İntegral Alma teknikleri

31.1 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa

Bir fonksiyonun integralini almak demek, o fonsiyonu türev kabul eden fonksiyonları bulmak demektir. Öyleyse, işin esası (f, f') (fonkion-türevi) eşleşmesidir. Bir fonksiyonun sonsuz çokluktaki belirsiz integralleri (ilkelleri) birer sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğuna göre, sabiti ihmal ederek(f, f') eşleşmesini bire bir imiş gibi görebiliriz. Bunu tam natematiksel yöntemi, türevi aynı olan fonksiyonları bir denklik sınıfı içine almaktır. Ancak, sözünü ettiğimiz basit kavramı açıklamak için o kadar ileri gitmeye gerek yoktur.

Calculu'ta türev alma kuralları integral alma kurallarından daha yeteneklidir. Türevi olan her fonksiyonun türevini bulmamızı sağlar. Ama bu kesimde göreceğimiz gibi, integral alma kurallarımız çok yetenekli değildir. Bir fonksiyonun integralinin varlığını biliyor olsak bile, bazen o integrali bulamayabiliriz. Bunun tipik örneği $\int e^{x^2} dx$ integralidir. integrand sürekli olduğu için, integralin varlığını biliyoruz, ama e^{x^2} fonksiyonunu türev olarak kabul eden fonksiyonu bilmiyoruz.

İntegral alma eyleminde genel sayılacak tek kural, integrandı türev kabul eden fonksiyonun bulunması eylemidir. Bu eylem sonuç olarak (f, f') eşleşmesine indiregenir. Bütün integral alma yöntemleri sonunda (f, f') eşleşmesini kullanır. O nedenle ne kadar çok fonksiyonun türevini biliyorsak, ters işlemi, yani türevden ilkel fonksiyonu bulma eylemini de o kadar biliyor oluruz. Bunun için türev alma kuralları bize çok bilgi veriyor. Sabitler, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, ters fonksiyonlar gibi bir sınıflandırmayla pratikte çok kullanılan fonksiyonların türevlerini listeleyebiliyoruz. Oradan ters dönüşüm yaparak (f, f') eşleşmesine dönebiliriz.

Genel geçerliği olan yöntem olmadığı için, fonksiyonları alt sınflara ayırıp, her sınıf için geçerli olan integral alma yöntemlerini ortaya koyacağız. Yukarıda da söylediğimiz gibi, alt sınıflara bölme sorunu tam çözmüyor. Ama oldukça iyi sonuçlar veriyor. Bilmemiz gereken şey, hangi alt sınıfta hangi yöntemi kullanıyorsak kullanalım, sonuçta (f, f') eşleşmesini kurabilirsek integrali çözmüş oluyoruz.

Doğal olarak, alt sınıflarda integral alırken bazı kurallar ortaya çıkıyor. Onları birer alet (fomül) olarak kullanıyoruz. O aletler çok işimize yarar.

Alt sınıflara bölme eylemi için de genel geçerliği olan yöntemden söz edilemez. Ama tarih boyunca sınama-yanılma yöntemiyle ortaya çıkarılan bazı sınıflar oldukça standart sayılır. Bu kesimde onları ele alacağız. Yine de ele aldığımız alt sınıfların tam bir liste oluşturmadığını bilmeliyiz. Öyle olsa bile, öğrenciye bir yol haritası verebilmek için integrak teknikleri diye adlandıracağımız büyük sınıfın başlıca alt sınıflarını sıralamak uygun olacaktır.

1. İlkeli bilinen fonksiyonlar
2. sabit foksiyonlar
3. Polinomlar
4. Rasonel Fonksiyonlar
5. Rasyonelleştirme
6. Değişken değiştirme
7. Kısmi İntegrasyon
8. Trigonometrik Fonksiyonlar
9. Ters Trigonometrik fonksiyonlar
10. Hiperbolik Fonksiyonlar
11. ers hiperbolik fonksiyonlar
12. Köklü ifadeler

31.2 *İntegral Alma Yöntemeleri*

$f(x)$ fonkiyonunun belirsiz integrali türevleri $f(x)$ olan bütün fonkiyonlardır. Belirsiz integral

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C \qquad (C sabit) \tag{31.1}$$

simgesiyle gösterilir. Belirsiz denmesinin nedeni, $F(x)$ fonksiyonu türev kabul eden fonksiyonların sonsuz çoklukta oluşu ve hangisinden söz edildiğinin belli olmayışıdr. Sonsuz çoklukta olan belirsiz integraller birer sabit farkıyla birbirlerine eşittitler. Bu demektir ki, $F(x)$ ile $G(x)$ fonksiyonları $f(x)$ fonksiyonuun belirsiz integrali iseler

$$f(x) - G(x) = K \qquad (K sabit) \tag{31.2}$$

olur.

$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integraline *ilkel* (primitive), *ters türev* gibi adlar da verilir. Yalınlığı nedeniyle *ilkel* terimini tercih ediyouz. Ama öteki terimleri de, konuya açıklık getirmek gerektiğinde, eş anlamlı olarak kullanacağız.

(25.1) ifadesinde C sabiti sayısal her değeri alabilir. Dolayısıyla $F(x)$ fonksiyonunun sonsuzçoklukta belirsiz integrali vardır. Gerçel fonksiyonlarda çalışıyorsak, (25.1) belirsiz integralleri bütün düzlemi doldurur. Yani düzlemin her noktasından geçen bir ve yalnızca bir tane belirsiz integral vardır. Aynı fonksiyonun belirsiz integralleri kesişmezler.

31.3 $\int R(sinx, cosx)$ biçimindeki İntegraller

YARIM-AÇI YÖNTEMI

$sinx$ ve $cosx$ cinsinden rasyonel olan fonksiyonların integrai için $u = \tan\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$ konumuyla,

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) = \frac{2u}{1+u^2}$$
$$\cos = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

bulunur.

$$u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\tan^{-1}u,\ dx = \frac{2}{1+u^2}du, \quad -\pi < x < \pi$$

çıkar.

Asıl integral u cinsinen rasyonel bir fonksiyonun integraline dönüşür. Artık rasyonel fonksiyonların integrali için bilinen yöntemler uygulanablir. Bu yönteme *yarım-açı* yöntemi de denilir.

Bu dönüşümü sağlayan trigonometrik özdeşlikler şunlardır.

$$\begin{aligned} sinx &= 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} \\ &= \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{2tan\frac{x}{2}}{1 + tan^2 fracx2} \end{aligned}$$

Benzer olarak,

$$\begin{aligned} cosx &= cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} \\ &= \frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - tan^2\frac{x}{2}}{1 + tan^2\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$tanx = \frac{2tan^2\frac{x}{2}}{1 - tan^2\frac{x}{2}}$$

eşitlikleri çıkar. Buradan $u = \tan\frac{x}{2}$ konumu yapılınca,

$$sinx = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \text{ve} \quad cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$x = 2Arctanu \quad \text{ve} \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

eşitlikleri kullanılır hale gelir. Böylece asıl integral

$$\begin{aligned} \int R(sinx, cosx)\,dx &= \int R(\frac{2u}{1+u^2)}, \frac{1-u^2}{1+u^2)}du \\ &= \int R_1(u)\,du \end{aligned}$$

biçimine döner. burada $R_1(u)$ fonksiyonu u değişkeninin rasyonel bir fonksiyondur. Onun integrali alınırkan rasyonel fonksiyonların integrali için bilinen yöntemler uygulanabilir. Bu eylemde anımsanması gereken trigonometrik özdeşlikler şunlardır.

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x) cos^2 x = \frac{2}{2}(1 + cos2x)$$

$$\begin{aligned}
sinmx.cosnx &= \frac{1}{2}\left(sin(m-n)x + sin(m+n)x\right)\\
sinmx.sinnx &= \frac{1}{2}\left(cos(m-n)x - cos(m+n)x\right)\\
cosmx.cosnx &= \frac{1}{2}\left(cos(m-n)x + cos(m+n)x\right)
\end{aligned}$$

Örnek 31.1.

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = tan\frac{x}{2}$ konumuyla, yukarda söylendiği gibi,

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

olur. Bunlar verilen intgralde yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+1} \frac{2}{1+u^2} du\\
&= 4\int \frac{u}{2(1+u^2)}\\
&= 2\int \frac{u}{1+u^2} \qquad / t = 1+u^2)\\
&= \int \frac{1}{t} dt\\
&= \ln|t| + C\\
&= \ln|1+u^2| + C\\
&= \ln|1+\tan^2\frac{x}{2}| + C\\
&= \ln(sec^2\frac{x}{2}) + C\\
&= 2\ln|sec\frac{x}{2}| + C
\end{aligned}$$

çıar. □

Örnek 31.2.

$$\int \frac{1}{1+sinx} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$u = \tan\frac{x}{2}$ konumuyla

$$sinx = \frac{2u}{1+u^2}, cosx = \frac{1-u32}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

olur. Bunlar integrandda yerlerine konulursa

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{1+sinx}\,dx \\
&\int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\,du \\
&= \int \frac{2}{1+2u+u^2}\,du \\
&= \int \frac{2}{(1+u)^2}\,du \\
&= -2(1+u)^{-1} \\
&= -\frac{2}{(1+u)}
\end{aligned}
$$

çıkar. Buradan x değişkenine dönülürse,

$$\int \frac{1}{1+sinx}\,dx = -2\frac{1}{(1+tan\frac{x}{2})}$$

bulunur.

Örnek 31.3.

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = sectdx = sect.\tan t$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I = \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx &= \int sec^3 t\sqrt{sec^2 t-1}sect.\tan t\,dt \\
&= \int sec^4 t.\tan^2 t\,dt \\
&= \int sec^2 t.\tan^2 t.sec^2 t\,dt \\
&= \int (1+tan^2 t)\tan^2 t.sec^2 t\,dt \qquad (u = tant) \\
&= \int (u^4+u^2)du = \frac{1}{5}u^5+\frac{1}{3}u^3+C \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C
\end{aligned}
$$

bulunur. □

Örnek 31.4.

$$\int \frac{1}{3sinx+4cosx}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$u = \tan\frac{x}{2}$ konumuyla

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

olur. Bunlar integrandda yerlerine konulursa

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{3\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)+4\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \frac{2}{1+u^2}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-\frac{3}{2}u-1}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-\frac{3}{4})^2-(\frac{5}{4})^2}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t)^2-(\frac{5}{4})^2}\,du \qquad (t = u-\frac{3}{4}) \\
&= -\frac{1}{5}\int \frac{dt}{t+(\frac{5}{4})} - \int \frac{dt}{t-(\frac{5}{4})} \\
&= -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t+\frac{5}{4}}{t-\frac{5}{4}}\right| + C \\
&= -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{u+\frac{1}{2}}{u-2}\right| + C \\
&= -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\tan\frac{x}{2}-2}\right| + C
\end{aligned}
$$

Örnek 31.5.

$$
I = \int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx \tag{31.3}
$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1-\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,dx = \int \frac{1+u^2-2u}{1+u^2}du \\
&= \int \left(1-\frac{2u}{1+u^2}\right)du \\
&= u - ln(1+u^2) + C \\
&= tan\frac{x}{2} - ln\left(1+tan^2\frac{x}{2}\right) + C \\
&= tan\frac{x}{2} - ln\left(sec^2\frac{x}{2}\right) + C \\
&= tan\frac{x}{2} + ln\left(cos^2\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}
$$

Örnek 31.6.

$$
I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\,dx \tag{31.4}
$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\, dx \\
&= \int \frac{(sin^2 x)}{\cos x + 2} \sin x\, dx \\
&= \int \frac{(1 - cos^2 x)}{\cos x + 2} \sin x\, dx \\
&= \int \frac{(u^2 - 1)}{u + 2}\, du \qquad (u = cosx) \\
&= \int \left(u - 2 + \frac{3}{u+2} \right) du \\
&= \frac{1}{2} u^2 - 2u + 3 ln|u + 2| + C \\
&= \frac{1}{2} \cos^2 x - 2\cos x + 3 ln|\cos x + 2| + C
\end{aligned}$$

Örnek 31.7.

$$I = \int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}\, dx \tag{31.5}$$

integralini hesaplayınız.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}\, dx \\
&= \int \frac{t+1}{t-1} 2t\, dt \qquad x = t^2, dx = 2t dt) \\
&= 2 \int \left(1 + \frac{2}{t-1} \right) dt \\
&= 2 \int dt + 4 \ln|t - 1| + C \\
&= 2t + \ln(t-1)^4 + C \\
&= 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x} - 1)^4 + C
\end{aligned}$$

Örnek 31.8.

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx \tag{31.6}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \int \frac{\sqrt[3]{1+t}}{t^2} 4t^3 dt \qquad (x = t^4, dx = 4t^3\, dt) \\
&= 4 \int t \sqrt[3]{1+t}\, dt \qquad (u^3 = 1 + t, dt = 3u^2 du) \\
&= 12 \int (u^3 - 1) u.u^2 du \\
&= 12 \int (u^6 - u^3)\, du \\
&= 12 (\frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{4} u^4) + C \\
&= \frac{12}{7} (1+t)^{\frac{7}{3}} - 3(1+t)^{\frac{4}{3}} + C \\
&= \frac{12}{7} (1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 31.9.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}\qquad (t^2=e^x+1)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\\
&=\int\frac{dt}{t^2-1}\qquad (t^2=e^x+1)\\
&=2\int\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\frac{dt}{t+1}\right)\\
&=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\\
&=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C
\end{aligned}$$

Örnek 31.10.

$$I=\int\sin^2 x.\cos^4 x\,dx \tag{31.7}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I&=\int\sin^2 x.\cos^4 x\,dx\\
&=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2\,dx\\
&=\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)\,dx\\
&=\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 2x-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)-(1-\sin^2)\cos 2x\right)\,dx\\
&=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)\,dx+\frac{1}{8}(\sin^2 2x.\cos 2x\,dx\\
&=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C
\end{aligned}$$

Örnek 31.11.

$$I=\int\tan^m x.sec^n x\,dx \tag{31.8}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: n çift ise $n=2p$ ve $u=\tan x, du=sec^2 x\,dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
I=\int\tan^m x.sec^n x\,dx&=\int\tan^m x(1+\tan^2 x)^{p-1}sec^2 x\,dx\\
&=\int(1+u^2)^{p-1}u^m\,du
\end{aligned}$$

elde edilir.

m tekse $m = 2k+1$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \tan^m x.sec^n x\,dx = \int \tan 2k+1 x.\sec x\,dx \\
&= \int sec^n x(\tan^2 x)^k \tan x\,dx \\
&= \int sec^{n-1} x(\tan^2 x)^k \tan x.secx\,dx \\
&= \qquad\qquad = \int sec^{n-1} x(\tan^2 x)^k \tan x.secx\,dx \\
&= \qquad\qquad = u^{m-1}(u^2-1)^k\,du
\end{aligned}
$$

m çift n tek ise $m = 2k$ ve $n = 2p+1$ konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \tan^m x.sec^n x\,dx = \int (\tan^2 x)^k.sec^{2p+1} x\,dx \\
&= \int (sec^x - 1)^k.sec^{2p+1} x\,dx
\end{aligned}
$$

bulunur. Son ifade $\int sec^r\ dx$ biçimindedir ve indirgeme yöntemiyle çözülebilir.

Örnek 31.12.

$$I = \int \tan^2 x.sec^4 x\,dx \tag{31.9}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \tan^2 x.sec^4 x\,dx = \tan^2 x.sec^2 x.sec^2 x\,dx \\
&= \int \tan^2 x.(1+\tan^2 x)sec^2 x\,dx \qquad u = \tan x, du = sec^2 x\,dx) \\
&= \int u^2(1+u^2)\,du \qquad = \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C
\end{aligned}
$$

Örnek 31.13.

$$I = \int \tan x.sec^6 x\,dx \tag{31.10}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Önceki formül uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
I &= \int \tan x.sec^6 x\,dx = \int sec^5 x.secx.\tan x\,dx \\
&= u^5\,du \\
&= \frac{1}{6}sec^6 x + C
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 31.14.

$$I = \int \tan^2 x.sec^3 x\,dx \tag{31.11}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: İndirgeme formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan^2 x.sec^3 x\,dx = \int (sec^2 x - 1)sec^3 x\,dx \\
&= \int (sec^5 x\,dx - \int sec^3 x\,dx \qquad \text{indrgeme formülünden} \\
&= \left(\frac{1}{4}(sec^3 x.\tan x) + \frac{3}{4}\int sec^3 x\,dx\right) - \int sec^3 x.\,dx \\
&= \frac{1}{4}(sec^3 x.\tan x) - \frac{1}{4}\int sec^3 x\,dx \\
&= \frac{1}{4}(sec^3 x.\tan x) - \frac{1}{4}secx.\tan x - \frac{1}{8}\ln|secx + \tan x + C
\end{aligned}$$

bulunur.

31.4 İndirgenme Yöntemleri

İntgral eylemindeki indigeme formülleri yinelge (recurrence) formüllerinin özel halidir. Yinelge, bir eylemin art arda tekrarlanarak en yalın (çözülebilir) biçimine dönüştürülmesidir. Bunu integral için bir örnekle açıklayabiliriz. Örneğin,

Örnek 31.15.

$$\int cos^n x\,dx \tag{31.12}$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. O durumda kuvveti düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int (\cos x)^n\,dx \\
&= \int (\cos x)^{n-1}.\cos x\,dx \\
&= \int (\cos x)^{n-1}.d(\sin x)
\end{aligned}$$

Kısmi integrasyon işlemleriyle,

$$\begin{aligned}
\int cos^n x\,dx &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - \int \sin x.d\left((\cos x)^{n-1)}\right) \\
&= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int \sin x.(\cos x)^{n-2)}.\sin x\,dx \\
&= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2)}.(\sin x)^2\,dx \\
&= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2)}.(1-(\cos x)^2\,dx \\
&= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2)}.\,dx - (n-1)\int (\cos x)^n\,dx \\
&= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

çıkar. Buradan I_n çözülürse

$$\begin{aligned}
I_n + (n-1)I_n &= (cosx)^{n-1}.\sin x + (n-1)I_{(n-2)} \\
nI_n &= (cosx)^{n-1}.\sin x + (n-1)I(n-2) \\
I_n &= \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}.\sin x + \frac{n-1}{n}I_{(n-2)}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\int (\cos x)^n\,dx = \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}.\sin x + \frac{n-1}{n}\int (\cos x)^{n-2}\,dx \tag{31.13}$$

indirgeme fomülü bulunur. Benzer şekilde,

$$\int (\sin x)^n\,dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}.\cos x + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2}\,dx \tag{31.14}$$

Örnek 31.16.

$$\int cos^5 x\,dx$$

integralini bulmak isteyelim. $n = 5$ olduğundan

$$\begin{aligned}
n = 5 &\Longrightarrow I_5 = \int (\cos x)^5\,dx = \frac{1}{5}cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}I_3\\
n = 3 &\Longrightarrow I_3 = \frac{1}{3}(\cos x)^2.\sin x + \frac{2}{3}I_1\\
n = 1 &\Longrightarrow I_1 = \int cos x\,dx = \sin x + C_1
\end{aligned}$$

Şimdi yürünülen yola geri dönülürse,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int cos x\,dx = \sin x + C_1\\
I_3 &= \frac{1}{3}(\cos x)^2.\sin x + \frac{2}{3}sin x + C_2 \qquad (C_2 = \frac{2}{3}C_1)\\
I_5 &= \frac{1}{5}(\cos x)^4.\sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}(\cos x)^2.\sin x + \frac{2}{3}\sin x\right) + C
\end{aligned}$$

Örnek 31.17.

$$I_n = \int x^n e^{\alpha x}\,dx \tag{31.15}$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. x^n çarpanının kuvvetini düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int x^n e^{\alpha x}\,dx\\
&= \frac{1}{n+1}\int e^{\alpha x} d(x^{n+1}), \qquad \left(x^n dx = \frac{d(x^{n+1})}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int e^{\alpha x} d(x^{n+1}) &= x^{n+1}e^{\alpha x} - \int x^{n+1} d(e^{\alpha x})\\
&= x^{n+1}e^{\alpha x} - \alpha\int x^{n+1}e^{\alpha x}\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+1)I_n &= x^{n+1}e^{\alpha x} - \alpha I_{n-1}\\
I_n &= \frac{1}{\alpha}\left(x^n e^{\alpha x} - nI_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

çıkar. Buradan

$$\int x^n e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\left(x^n e^{\alpha x} - n\int x^{n-1}e^{\alpha x}\right) \tag{31.16}$$

indirgeme formülü bulunur.

31.5 Bazı İndirgeme Formülleri

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx \\
\Longrightarrow I_n &= \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a(2n+1)} - \frac{2nb}{a(2n+1)} I_{n-1} \\
I_n &= \int \frac{1}{x^n\sqrt{(ax+b)}}\,dx \\
\Longrightarrow I_n &= -\frac{\sqrt{(n-1)bx^{n-1}}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2b(n-1)} I_{n-1} \\
In,m &= \int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n} \\
\Longrightarrow a^2 In,m &= a^2 Im,n + Im-2,n \\
I_n &= \int x^n \sin(ax)\,dx \\
\Rightarrow a^2 I_n &= -ax^n\cos(ax) + nx^{n-1}\sin(ax) - n(n-1)I_{n-2} \\
J_n &= \int x^n \cos(ax)\,dx \\
\Rightarrow a^2 J_n &= ax^n\sin(ax) + nx^{n-1}\cos(ax) - n(n-1)J_{n-2} \\
I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\
\Rightarrow I_n &= \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}
\end{aligned}
$$

Örnek 31.18. *$a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda*

$$
I_n = \int x^a(\ln x)^n\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}(\ln x)^n - \frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx \tag{31.17}
$$

indirgemr formülünü ispatlayınız.

$$
u = (\ln x)^n,\ du = n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx, dv = x^a\,dx,\ v = \frac{1}{a+1}x^{a+1}
$$

konumuyla,

$$
I_n = \frac{1}{a+1}x^{a+1} - \frac{n}{a+1}\int x^{a+1}(\ln x)^{n-1}\,dx \quad \square
$$

Örnek 31.19. *$a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda*

$$
I_n = \int x^{-1}(\ln x)^n\,dx = \int (\ln x)^n d(\ln x) = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C \tag{31.18}
$$

dir.

$$
I_n = \int \sin^n(ax)\cos(ax)\,dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C \tag{31.19}
$$

dir.

$$
I_n = \int \cot(ax)\,dx = \ln|\sin(ax)| + C \tag{31.20}
$$

dir.

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int \tan^2 x . \sec^2 x d - \int \tan^{n-2} x dx \\
&= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos x}\, dx \\
&= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\
&= -ł|\cos x| + C
\end{aligned}$$

dir.

$$I = \int \sec(x)\, dx = \ln|\sec(x) + \tan x| + C$$

dir.

$$I = \int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \int \cos(ax)\, d(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

dir.

31.6 *İlkel Fonksiyon Biliniyorsa*

Bir fonksiyonun integralini almak demek, o fonsiyonu türev kabul eden fonksiyonları bulmak demektir. Öyleyse, işin esası (f, f') (fonkion-türevi) eşleşmesidir. Bir fonksiyonun sonsuz çokluktaki belirsiz integralleri (ilkelleri) birer sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğuna göre, sabiti ihmal ederek(f, f') eşleşmesini bire bir imiş gibi görebiliriz.

Calculu'ta türev alma kuralları integral alma kurallarından daha yeteneklidir. Türevi olan her fonksiyonun türevini bulmamızı sağlar. Ama bu kesimde göreceğimiz gibi, integral alma kurallarımız çok yetenekli değildir. Bir fonksiyonun integralinin varlığını biliyor olsak bile, bazen o integrali bulamayabiliriz. Bunun tipik örneği $\int e^{x^2} dx$ integralidir. integrand sürekli olduğu için, integralin varlığını biliyoruz, ama e^{x^2} fonksiyonunu türev olarak kabul eden fonksiyonu bilmiyoruz.

İntegral alma eyleminde genel sayılacak tek kural, integrandı türev kabul eden fonksiyonun bulunması eylemidir. Bu eylem sonuç olarak (f, f') eşleşmesine indiegenir. Bütün integral alma yöntemleri sonunda (f, f') eşleşmesini kullanır. O nedenle ne kadar çok fonksiyonun türevini biliyorsak, ters işlemi, yani türevden ilkel fonksiyonu bulma eylemini de o kadar biliyor oluruz. Bunun için türev alma kuralları bize çok bilgi veriyor. Sabitler, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, ters fonksiyonlar gibi bir sınıflandırmayla pratikte çok kullanılan fonksiyonların türevlerini listeleyebiliyoruz. Oradan ters dönüşüm yaparak (f, f') eşleşmesine dönebiliriz.

Genel geçerliği olan yöntem olmadığı için, fonksiyonları alt sınflara ayırıp, her sınıf için geçerli olan integral alma yöntemlerini ortaya koyacağız. Yukarıda da söylediğimiz gibi, alt sınıflara bölme sorunu tam çözmüyor. Ama oldukça iyi sonuçlar veriyor. Bilmemiz gereken şey, hangi alt sınıfta hangi yöntemi kullanıyorsak kullanalım, sonuçta (f, f') eşleşmesini kurabilirsek integrali çözmüş oluyoruz.

Doğal olarak, alt sınıflarda integral alırken bazı kurallar ortaya çıkıyor. Onları birer alet (fomül) olarak kullanıyoruz. Aletler çok işimize yarar.

Alt sınıflara bölme eylemi için de genel geçerliği olan yöntemden söz edilemez. Ama tarih boyunca sınama-yanılma yöntemiyle ortaya çıkarılan bazı sınıflar oldukça standart sayılır. Bu kesimde onları ele alacağız. Yine de ele aldığımız alt sınıfların tam bir liste oluşturmadığını bilmeliyiz.

Yukarıda ifade edldiği gibi belisiz integral teimi ile ilkel integral teimini eş anlamlı kullanacağız.

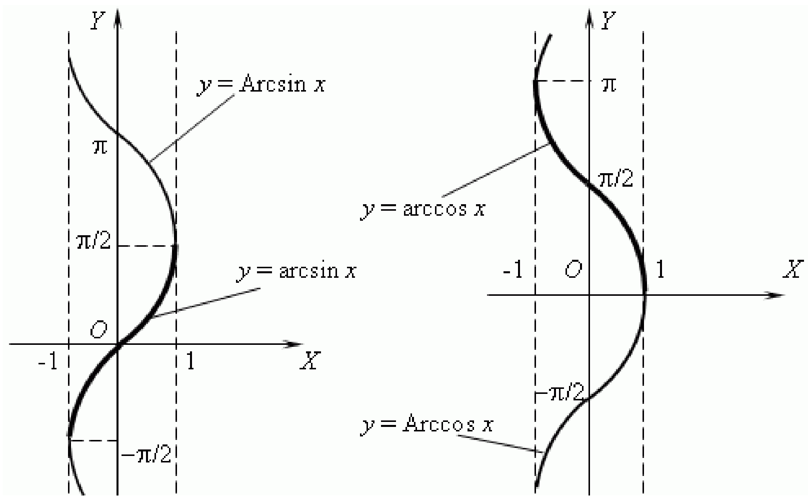
31.7 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir. Halbuki trigonometrik fonksiyonlardan hiç biri, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$ ye bire bir ve örten değildir. Ancak trigonometrik fonksiyonların tanım kümelerinin uygun alt kümeleri seçilerek bire bir ve örten olması sağlanabilir. Bu tür aralıkları bularak; sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının ters fonksiyonlarını tanımlayalım.

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $y = f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunun grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktirler. Dolayısıyla, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği biliniyorsa, ters fonksiyonunun grafiği simetri alınarak kolayca elde edilebilir. Aşağıdaki grafiklerde bu gerçeği kullanınız.

31.7.1 Arcsinus Fonksiyonu

Şekil 31.1: arcsin,arccos



Sinüs fonksiyonun tanım aralığını $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ alırsak, bu fonksiyon bire bir ve örten olur. Bu durumda;

$f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\Rightarrow[-1,1]$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu vardır. Bu fonksiyonu, $\sin^{-1}x$ veya $arcsinx$ simgelerinden birisiyle göstereceğiz. Tabii, $arcsin:[-1,1]\Rightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dir.

Bu tanıma göre;

$$\begin{array}{lcccl} y=f(x)=\sin x & \Leftrightarrow & x & = & f^{-1}(y) \\ & \Leftrightarrow & & = & \sin^{-1}y \\ & \Leftrightarrow & & = & arcsiny \end{array}$$

olur. Eğer ters fonksiyonda x ile y' yi yer değiştirirsek $x=\arcsin y$ yerine $y=\arcsin x$ olur.

$f^{-1}(x)=\arcsin x$ fonksiyonunun değişim tablosu ve grafiği şöyledir:

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

$\arcsin x$ fonksiyonunun grafiği ile aynı aralıktaki $\sin x$ fonksiyonunun grafiğinin $y=x$ açıortay doğrusuna göre, simetrik olduğunu görünüz.

Başka tanım aralıkları için $\arcsin x$ fonksiyonlarını elde edebilir miyiz? Örnek veriniz.

31.7.2 ArcCosinus Fonksiyonu

Kosinüs fonksiyonunun, bire bir ve örten olduğu tanım aralıklarından bir tanesi $[0,\pi]$ dir.

$f^{-1}(x)=\cos^{-1}x$ ile tanımlı $f^{-1}:[-1,1]\Rightarrow[0,\pi]$ fonksiyonuna $\cos x$'in **ters fonksiyonu** denir ve $\arccos x$ biçiminde gösterilir. Bu tanıma göre;

$$\begin{array}{lcccl} y=f(x)=\cos x & \Leftrightarrow & x & = & f^{-1}(y) \\ & \Leftrightarrow & & = & \cos^{-1}y \\ & \Leftrightarrow & & = & arccosy \end{array}$$

olur. Eğer x ile y'yi yer değiştirirsek, $x=\arccos y$ yerine $y=\arccos x$ yazılabilir

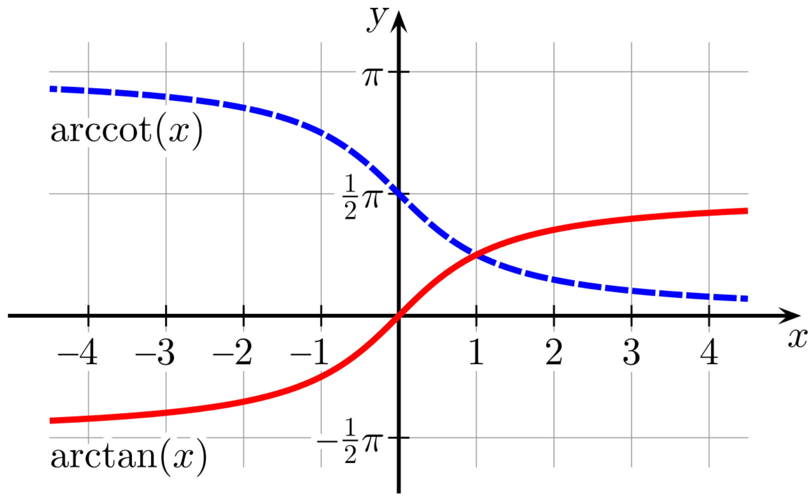
$f^{-1}(x)=\arccos x$ fonksiyonunun değişim tablosu ve grafiği şöyledir:

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$\arccos x$	π	$\searrow$	$\frac{3\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0

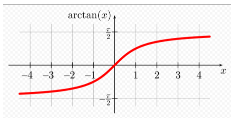
Yukarıdaki dik koordinat düzleminde $\arccos x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının grafiklerini inceleyiniz. Neye göre simetrik olduklarını söyleyiniz.

$\arccos x$ fonksiyonları için başka tanım aralıkları bulunuz.

31.7.3 Arctanjant Fonksiyonu



Şekil 31.2: arctan,arccot



Şekil 31.3: arctan x

Tanjant fonksiyonunun esas periyodu π'dir. Bu fonksiyon $\frac{\pi}{2}$'nin tek katları için tanımsızdır. O halde, tanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu tanım aralıklarından bir tanesi $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dir.

$f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ ile tanımlı $f^{-1} : (-\infty, +\infty) \Rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ fonksiyonuna $\tan x$'in **ters fonksiyonu** denir ve $\arctan x$ biçiminde gösterilir. Bu tanıma göre;

$$\begin{aligned} y = f(x) = \tan x \quad &\Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \quad = \tan^{-1} y \\ &\Leftrightarrow \quad = arctany \end{aligned}$$

olur. x ile y'yi yer değiştirirsek, $x = arctany$ yerine $y = arctanx$ yazılabilir.

$y = \arctan x$ fonksiyonunun değişim tablosu ve grafiği şöyledir:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Yukarıdaki dik koordinat düzlemindeki $\arctan x$ ve $\tan x$ fonksiyonlarını karşılaştırınız.

31.7.4 Arccotanjant Fonksiyonu

Kotanjant fonksiyonun esas periyodu π'dir. Bu fonksiyon $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k\pi$ değerleri için tanımsızdır. O halde kotanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu tanım aralıklarından bir tanesi $(0, \pi)$ dir.

$f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$ ile tanımlı $f^{-1} : (-\infty, +\infty) \Rightarrow (0, \pi)$ fonksiyonuna $\cot x$'in **ters fonksiyonu** denir ve $arccotx$ biçiminde gösterilir. Bu tanıma göre; $x \in (0, \pi)$ için,

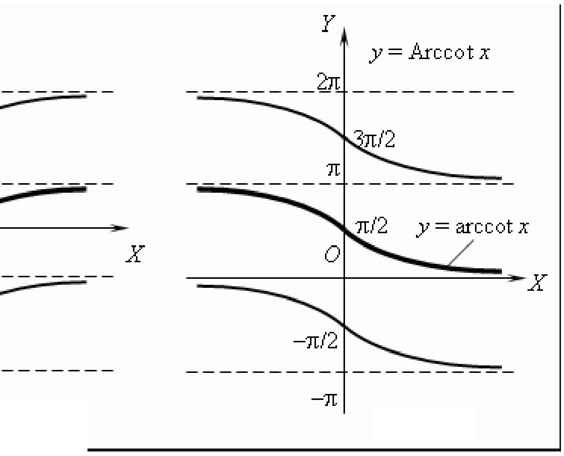
$$\begin{aligned} y = f(x) = \cot x \quad &\Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \quad = \cot^{-1} y \\ &\Leftrightarrow \quad = arccoty \end{aligned}$$

olur. x ile y'yi yer değiştirirsek, $x = \text{arccot} y$ yerine $y = \text{arccot} x$ yazılabilir.

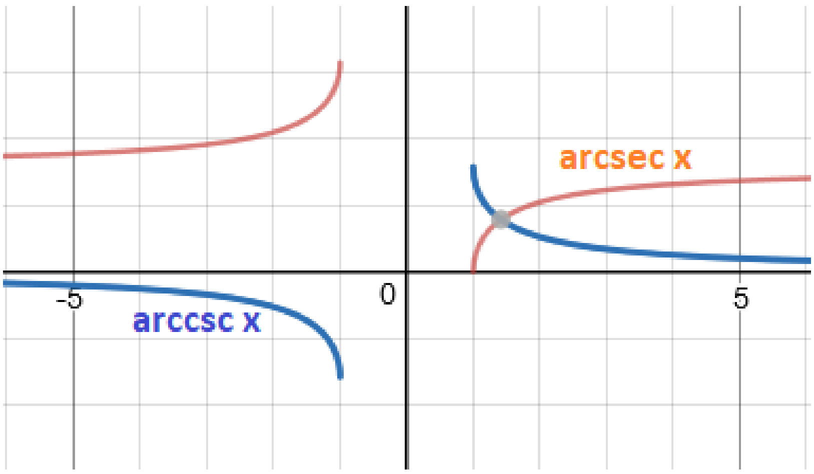
$y = arcotx$ fonksiyonunun değişim tablosu ve grafiği şöyledir:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		+1		$+\infty$
$\text{arccot} x$	π	↘	$\frac{3\pi}{4}$	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{\pi}{3}$	↘	$\frac{\pi}{4}$	↘	0

$\text{arccot} x$ fonksiyonu için başka tanım aralıkları yazınız.



Şekil 31.4: Arctan ve Arccotan



Şekil 31.5: Arcsec ve Arccosec

31.8 Örnekler

1. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ ifadesinin değerini bulalım:

$$\left.\begin{array}{l}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=x\Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})=y\Leftrightarrow \sin y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\, y=-\frac{\pi}{4}\text{olur.}$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{3}+(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{12}$$

2. $\cos(\arctan 3)$ ifadesinin değerini bulalım:
$\cos(\arctan 3)=x$ diyelim.
$\arctan 3=u\Leftrightarrow \tan u=3$
olur. Bu eşitliğe uyan yandaki şekilden;
$\cos u=\frac{1}{\sqrt{10}}$ olur.
O halde, $\cos(\arctan 3)=\frac{\sqrt{10}}{10}$ bulunur.

31.9 $\int R(sinx, cosx)$ biçimindeki İntegraller

$sinx$ ve $cosx$ cinsinden rasyonel olan fonksiyonların integrai için
$u=\tan\frac{x}{2}\quad(-\pi<x<\pi)$ konumuyla,

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)=\frac{2u}{1+u^2}$$
$$\cos x=\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2-\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

bulunur.

$$u=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow x=2\tan^{-1}u,\; dx=\frac{2}{1+u^2}\,du,\quad -\pi<x<\pi$$

çıkar.

Asıl integral u cinsinen rasyonel bir fonksiyonun integraline dönüşür. Artık rasyonel fonksiyonların integrali için bilinen yöntemler uygulanabilir. Bu yönteme *yarım-açı* yöntemi de denilir.

Bu dönüşümü sağlayan trigonometrik özdeşlikler şunlardır.

$$\begin{aligned}sinx&=2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}\\&=\frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{2tan\frac{x}{2}}{1+tan^2fracx2}\end{aligned}$$

Benzer olarak,

$$\begin{aligned}cosx&=cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}\\&=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

$$tanx = \frac{2tan^2\frac{x}{2}}{1 - tan^2\frac{x}{2}}$$

eşitlikleri çıkar. Buradan $u = \tan\frac{x}{2}$ konumu yapılınca,

$$sinx = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \text{ve} \quad cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$x = 2Arctanu \quad \text{ve} \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

eşitlikleri kullanılır hale gelir. Böylece asıl integral

$$\int R(sinx, cosx)\,dx = \int R(\frac{2u}{1+u^2)}, \frac{1-u^2}{1+u^2)}du$$
$$= \int R_1(u)\,du$$

biçimine döner. burada $R_1(u)$ fonksiyonu u değişkeninin rasyonel bir fonksiyondur. Onun integrali alınırkan rasyonel fonksiyonların integrali için bilinen yöntemler uygulanabilir. Bu eylemde anımsanması gereken trigonometrik özdeşlikler şunlardır.

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)cos^2x = \frac{2}{2}(1 + cos2x)$$

$$sinmx.cosnx = \frac{1}{2}(sin(m-n)x + sin(m+n)x)$$
$$sinmx.sinnx = \frac{1}{2}(cos(m-n)x - cos(m+n)x)$$
$$cosmx.cosnx = \frac{1}{2}(cos(m-n)x + cos(m+n)x)$$

Örnek 31.20.

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = tan\frac{x}{2}$ konumuyla, yukarda söylendiği gibi,

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

olur. Bunlar verilen intgralde yerlerine konulursa,

$$I = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+1}\frac{2}{1+u^2}du$$
$$= 4\int \frac{u}{2(1+u^2)}du$$
$$= 2\int \frac{u}{1+u^2}du \qquad /t = 1+u^2)$$
$$= \int \frac{1}{t}dt$$
$$= \ln|t| + C$$
$$= \ln|1+u^2| + C$$
$$= \ln|1+\tan^2\frac{x}{2}| + C$$
$$= \ln(sec^2\frac{x}{2}) + C$$
$$= 2\ln|sec\frac{x}{2}| + C$$

çıar. □

Örnek 31.21. $\int \frac{1}{1+sinx}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm:

$u = \tan\frac{x}{2}$ konumuyla $sinx = \frac{2u}{1+u^2}, cosx = \frac{1-u32}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2}du$ olur. Bunlar integrandda yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{1+sinx}\,dx \\
& \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\,du \\
&= \int \frac{2}{1+2u+u^2}\,du \\
&= \int \frac{2}{(1+u)^2}\,du \\
&= -2(1+u)^{-1} \\
&= -2\frac{2}{(1+u)}
\end{aligned}$$

çıkar. Buradan x değişkenine dönülürse,

$$\int \frac{1}{1+sinx}\,dx = -2\frac{1}{(1+tan\frac{x}{2})} + C$$

bulunur.

Örnek 31.22.

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = sect dx = sect.\tan t$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
I = \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx &= \int sec^3 t\sqrt{sec^2 t-1}sect.\tan t\,dt \\
&= \int sec^4 t.\tan^2 t\,dt \\
&= \int sec^2 t.\tan^2 t.sec^2 t\,dt \qquad = \int (1+tan^2 t)\tan^2 t.sec^2 t\,dt \qquad (\\
&= \int (u^4+u^2)du = \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + C \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2-1)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C
\end{aligned}$$

bulunur. □

Örnek 31.23. $I = \int \frac{1}{3+5sinx}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{3+\frac{5}{\sin x}}\,dx \\
&= \frac{1}{6}\left(2x - 5\tan^{-1}\left(\frac{2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(x2)\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right) + C
\end{aligned}$$

Örnek 31.24. $\int \frac{1}{3sinx+4cosx}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm:

$$I = \frac{1}{5}\left(\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \ln\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) + C$$

Örnek 31.25. *$I = \int \frac{1}{3\sin x + 2\cos x + 2}\, dx$ integralini hesaplayınız.*

Çözüm:
$u = \tan\frac{x}{2}$ konumuyla $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2}du$
olur. Bunlar integrandda yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\frac{6u}{1+u^2} + 2\frac{1-u^2}{(1+u^2)} + 2} \frac{2}{1+u^2}\, du \\
&= \int \frac{2}{6u + 2(1-u^2) + 2(1+u^2)}\, du \\
&= \int \frac{1}{3u+2} du \\
&= \frac{1}{3} ln|3u+2| + C \\
&= \frac{1}{3} ln|3\tan(\frac{x}{2}) + 2| + C
\end{aligned}$$

Örnek 31.26.

$$I = \int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\, dx \tag{31.21}$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1 - \frac{2u}{1+u^2}}{1 + \frac{2u}{1+u^2}}\, dx = \int \frac{1+u^2-2u}{1+u^2} du \\
&= \int \left(1 - \frac{2u}{1+u^2}\right) du \\
&= u - ln(1+u^2) + C \\
&= tan\frac{x}{2} - ln\left(+tan^2\frac{x}{2}\right) + C \\
&= tan\frac{x}{2} - ln\left(+sec^2\frac{x}{2}\right) + C \\
&= tan\frac{x}{2} + ln\left(+cos^2\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Örnek 31.27.

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\, dx \tag{31.22}$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\, dx \\
&= \int \frac{(sin^2 x)}{\cos x + 2} \sin x\, dx \\
&= \int \frac{(1 - cos^2 x)}{\cos x + 2} \sin x\, dx \\
&= \int \frac{(u^2 - 1)}{u+2}\, du \qquad (u = cosx) \\
&= \int \left(u - 2 + \frac{3}{u+2}\right) du \\
&= \frac{1}{2}u^2 - 2u + 3ln|u+2| + C \qquad = \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3ln|\cos x + 2| + C
\end{aligned}$$

Örnek 31.28.

$$I=\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,dx \tag{31.23}$$

integralini hesaplayınız.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,dx \\
&= \int \frac{t+1}{t-1}\frac{1}{2t}\,dt \qquad x=t^2, dx=2tdt) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}+\int \frac{1}{(t-1)}\,dt
\end{aligned}$$

Örnek 31.29.

$$I=\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \tag{31.24}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int \frac{\sqrt[3]{1+t}}{t^2}4t^3\,dt \qquad (x=t^4) \\
&= 4\int t\sqrt[3]{1+t}\,dt \qquad (u^3=1+t) \\
&= 12\int (u^3-1)u.u^2\,du
\end{aligned}$$

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=2\int \frac{dt}{t^2-1} \qquad (t^2=e^x+1)$$

Örnek 31.30.

$$I=\int \sin^2 x.\cos^4 x\,dx \tag{31.25}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \sin^2 x.\cos^4 x\,dx \\
&= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)-(1-\sin^2)\cos 2x\right)\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)\,dx+\frac{1}{8}(\sin^2 2x.\cos 2x\,dx \\
&= \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C
\end{aligned}$$

Örnek 31.31.

$$I=\int \tan^m x.sec^n x\,dx \tag{31.26}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: n çift ise $n = 2p$ ve $u = \tan x, du = sec^2 x\, dx$ konumuyla,

$$I = \int \tan^m x.sec^n x\, dx = \int \tan^m x(1+\tan^2 x)^{p-1} sec^2 x\, dx$$
$$= \int (1+u^2)^{p-1} u^m\, du$$

elde edilir.

m tekse $m = 2k+1$ konumuyla,

$$I = \int \tan^m x.sec^n x\, dx = \int \tan 2k+1 x.\sec x\, dx$$
$$= \int sec^n x(\tan^2 x)^k \tan x\, dx$$
$$= \int sec^{n-1} x(\tan^2 x)^k \tan x.secx\, dx$$
$$= \qquad = \int sec^{n-1} x(\tan^2 x)^k \tan x.secx\, dx$$
$$= \qquad = u^{m-1}(u^2-1)^k\, du$$

m çift n tek ise $m = 2k$ ve $n = 2p+1$ konumuyla,

$$I = \int \tan^m x.sec^n x\, dx = \int (\tan^2 x)^k.sec^{2p+1} x\, dx$$
$$= \int (sec^x - 1)^k.sec^{2p+1} x\, dx$$

bulunur. Son ifade $\int sec^r\ dx$ biçimindedir ve indirgeme yöntemiyle çözülebilir.

Örnek 31.32.

$$I = \int \tan^2 x.sec^4 x\, dx \tag{31.27}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$I = \int \tan^2 x.sec^4 x\, dx = \tan^2 x.sec^2 x.sec^2 x\, dx$$
$$= \int \tan^2 x.(1+\tan^2 x)sec^2 x\, dx \qquad u = \tan x, du = sec^2 x\, dx)$$
$$= \int u^2(1+u^2)\, du \qquad = \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C$$
$$= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

Örnek 31.33.

$$I = \int \tan x.sec^6 x\, dx \tag{31.28}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Önceki formül uygulanırsa

$$I = \int \tan x.sec^6 x\, dx = \int sec^5 x.secx.\tan x\, dx$$
$$= u^5\, du$$
$$= \frac{1}{6} sec^6 x + C$$

çıkar.

Örnek 31.34.

$$I = \int \tan^2 x.sec^3 x\,dx \tag{31.29}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: İndirgeme formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan^2 x.sec^3 x\,dx = \int (sec^2 x - 1)sec^3 x\,dx \\
&= \int (sec^5 x\,dx - \int sec^3 x\,dx \qquad \text{indrgeme formülünden} \\
&= \left(\frac{1}{4}(sec^3 x.\tan x) + \frac{3}{4}\int sec^3 x\,dx\right) - \int sec^3 x.\,dx \\
&= \frac{1}{4}(sec^3 x.\tan x) - \frac{1}{4}\int sec^3 x\,dx \\
&= \frac{1}{4}(sec^3 x.\tan x) - \frac{1}{4}secx.\tan x - \frac{1}{8}\ln|secx + \tan x + C
\end{aligned}$$

bulunur.

31.10 Logaritmik integraller

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

biçeminde olan ya da bu biçeme dönüştürülebilen integralleri hesaplayabiliriz.

Örnek 31.35.

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x}\,dx \tag{31.30}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{1+e^x}\,dx \qquad e^{-x} \text{ ile pay ve paydayı çarp} \\
&= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx \qquad u = e^{-x}, du = -e^{-x}dx) \qquad = -\int \frac{du}{u} + C = -\ln|u| + C \\
&= -\ln|e^{-x}+1| + C \qquad ((e^{-x}+1) > 0) \qquad = -\ln(e^{-x}+1) + C
\end{aligned}$$

Örnek 31.36.

$$I = \int \frac{dx}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt \tag{31.31}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{1}{2}}}\,dt \qquad [ekok(2,3)06 \Rightarrow u = t^1 6, 6u^5 du = dt] \\
&= \int \frac{6u^5 du}{u^2 + u^3} \\
&= \int \frac{6u^5 du}{u^2(1+u)} \\
&\int (6u^2 - 6u + 6 + \frac{6}{1+u}du \\
&= 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln|1+u| + C \\
&= 2t^{\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{3}} + 6t^{\frac{1}{6}} - 6\ln(1+t^{\frac{1}{6}}) + C \qquad (1+t^{\frac{1}{6}}) > 0
\end{aligned}$$

Örnek 31.37.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \tag{31.32}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sinh - 1x \Big|_0^1 \\ &= \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right|_0^1 \\ &= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 \\ &= \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Örnek 31.38.

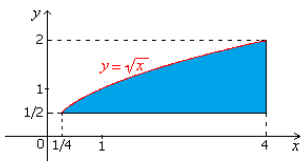
$$I = \int \frac{dx}{9-x^2}\, dx \tag{31.33}$$

integralini hesaplayınız.

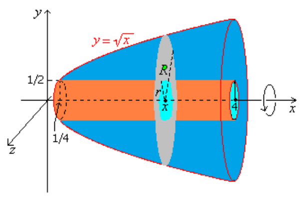
Çözüm:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{9-x^2}\, dx \frac{1}{3} \coth^{-1} \left(\frac{x}{4}\right)_4^6 \\ &= \frac{1}{3} \coth^{-1} 2 - \frac{1}{6} \coth^{-1} \left(\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{2+1}{2-1} - \frac{1}{6} \ln \frac{4+1}{4-3} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{3}{7} \end{aligned}$$

31.11 *Dönel Cisimleri Hacimleri*



Şekil 31.6: Dönen yüzey Parçası



Şekil 31.7: Oluşan Dönel cisim

Düzlemsel bir R bölgesinin, kendisini kesmeyen bir doğru etrafında dönmesiyle oluşan cisme dönel katı cisim denilir. Bu cisim gerçekte uzayda var olmayan ama hayal ettiğimiz bir cisimdir.

Düzlemsel R bölgesinin D doğrusuna göre üst sınırı $f(x)$ fonksiyonu ile belirlensin. R bölgesinin her noktasından onu kesmeyen D doğrusuna dikmeler inelim. R bölgesi parçalı değilse, dikmelerin ayakları D doğrusu üzerinde bir $[a,b]$ aralığı oluşturur. D doğrusunu koordinat ekseni olarak alırsak, $[a,b]$ aralığı f fonksiyonunun tanım bölgesi içinde olacaktır. Dikmelerin ayaklarını içeren $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsünü (partition) P ile gösterelim:

$$a = x_0 < x_1 < -x_2 < \ldots < x_n = b \tag{31.34}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, M = max\{\Delta x_i | \quad i = 1,2,\ldots,n\} \tag{31.35}$$

olsun. Her bölüntü içinde bir $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ olacak şekilde bir t_i noktası seçelim. Şimdi tabanı Δx_i ve yüksekliğ $h_i = |f(t_i)|$ olan dikörtgenin D doğrusu etrafında bir tam dönüş yaptığını varsayalım. Yarıçapı h_i olan bir silindir oluşur. Bu silindirin hacmi

$$\pi h_i^2 \Delta x_i = \pi f(t_i)^2 \Delta x_i \tag{31.36}$$

olacaktır. Bunların toplamı da asıl S cisminin hacmine yakın olacaktır.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f(t_i)^2 \Delta x_i \tag{31.37}$$

Eğer $M = max\{\Delta x_i\} \to 0$ iken (34.9) toplamının limiti varsa, bu limit

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx \tag{31.38}$$

integrali ile ifade edilir ve bu intgral S cisminin hacmine eşit olur.

Dönme ekseni değişirse, $Ox-$ ile $Oy-$ eksenlerini yer değiştirebiliriz:

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy = \pi \int_c^d x^2\,dy \tag{31.39}$$

Şimdi dönen R düzlemsel bölgesinin üstten $y = f(x)$, alttan $y = g(x)$ fonksiyonları ile sınırlı olduğunu düşünelim. Bu düzlem parçasının bir tam dönüş yapmasıyla oluşan dönel katı cismin hacmı f ile g fonksiyonlarına karşılık gelen iki dönel katı cismin hacimleri farkıdır. Dolayısıyla;

$$V = V_f - V_g = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\,dx \tag{31.40}$$

31.12 Silindirik Kabuklar Yöntemi

$y = f(x), x = a, x = b$ ve $Ox-$ ekseni ile çevrili düzlemsel bölgenin $Oy-$ ekseni çevresinde bir tam dönüş yaptığını düşünelim.

$[a,b]$ aralığının bir bölüntüsünü (partition) P ile gösterelim:

$$a = x_0 < x_1 < -x_2 < \ldots < x_n = b \tag{31.41}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, M = max\{\Delta x_i| \quad i = 1,2,\ldots,n\} \tag{31.42}$$

$t_i \in (xi, xi + \Delta xi)$ olan bir t_i noktası seçelim. her $t_i \in [a,b]$ için t_i noktasından geçen silindirin yanal alanı $A(t_i)$ olsun. Tabanı $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ ve yüksekliği $y_i = f(t_i)$ olan dikdötgen biçimindeki R_i bölgesinin $Oy-$ ekseni çevresinde dönmesiyle, kalınlığı en çok Δx_i olan silindirik bir cisim oluşur. Buna *kabuk* diyelim. Bu silindirin simetri ekseni $Oy-$ ekseni, iç yarıçı x ve dış yarıçapı t_i dir.

Sözkonusu dönüş esnasında $t_i \in [a,b]$ noktasının çizdiği çemberin uzunluğu $2\pi t_i$ olacaktır. O halde t_i'in çizdiği çember üzerinde kurulan silindirin yanal yüzey alanı $2\pi t_i f(t_i) = 2\pi t_i y_i$ olur. Yanal yüzeyi açıp bir düzlem parçası haline getirelim. Kabuğun kalınlığı en çok Δx_i olduğuna göre, kabuğun hacmı en çok $V_i = A(t_i).\Delta x_i = 2\pi t_i y_i \Delta x_i$ olur. Bütün $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ bölüntü aralıkları için elde edilen kabukların toplamı yaklaşık olarak cismin V hacmine eşit olmalıdır:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i \approx A(t_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi t_i y_i \Delta x_i \tag{31.43}$$

Eğer, bölüntü aralıklarının en uzunu sıfıra yaklaşırkek, yani max $M = max\{\Delta x_i\} \to 0$ iken (31.43) toplaamının limiti varsa, o limit

$$V = 2\pi \int_a^b xy\,dx \tag{31.44}$$

integralidir. Bu integralin değeri cismin V hacmine eşit olur.

Eğer dönel cisim $Ox-$ ekseni etrafında dönüyorsa (31.44) yerine, simetriden dolayı,

$$V = 2\pi \int_c^d xy\,dy \tag{31.45}$$

formülü elde edilir.

Şimdi R düzlemsel bölgesinin üstten $y = f(x)$, alttan $y = g(x)$, soldan $x = a$, sağdan $x = b$ ile sınırlandığını varsayalım. R bölgsi $Oy-$ ekseni etrafında bir tam dönme yaptığında oluşan cismin hacmi üstten $y = f(x)$ eğrisi, alttan $Ox-$ ekseni, soldan $x = a$, sağdan $x = b$ ile sınırlı bölgenin bir tam dönüşü esnasında oluşan V_f hacmi ile üstten $y = g(x)$ eğrisi, alttan $Ox-$ ekseni, soldan $x = a$, sağdan $x = b$ ile sınırlı bölgenin bir tam dönüşü esnasında oluşan V_g hacminin farkına eşit olacaktır:

$$V = V_f - V_g = 2\pi \int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big)\,dx \tag{31.46}$$

olur.

Örnek 31.39. *$y =^2$ parabolü ile $y = x^3$ eğrisi arasında kalan düzlemsel R bölgesi $Oy-$ ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan katı cismin hacmini bulunuz.*

Çözüm:

R bölgesi birinci dörtte birlik bilgededir: $(0 \le x \le 1)$ dir. Dönel cismin hacmi için (31.46) formülünü uygulayabiliriz:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x(x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right)_0^1 \\ &= \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

Örnek 31.40. *$y = (x-1)(x-3)^2$ eğrisi ile $Ox-$ ekseni arasında kalan düzlemsel R bölgesi $Ox-$ ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan katı cismin hacmini bulunuz.*

Çözüm:

R bölgesi birinci dörtte birlik bilgededir: $(0 \le x \le 8)$ dir. Dönel cisim $Ox-$ ekseni etrafında döndüğüne göre hacim için (31.46) formülünü uygulayabiliriz:

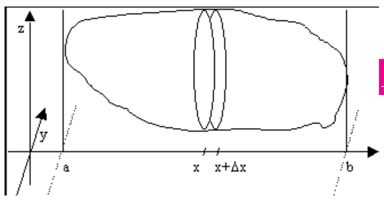
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x(x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right)_0^1 \\ &= \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

Örnek 31.41. *$y = \sqrt[3]{x}$, $(0,8)$ eğrisi ile $Ox-$ ekseni arasında kalan düzlemsel R bölgesi $Oy-$ ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan katı cismin hacmini bulunuz.*

Çözüm:

R bölgesi birinci dörtte birlik bilgededir Fonksiyonu $x = f(y) = y^3$ biçiminde yazabiliriz. $(0 \leq x \leq 2)$ dir. Dönme eylemi $Ox-$ ekseni etrafında olduğuna göre dönel cismin hacmi için (31.45) formülünü uygulayabiliriz:

$$V = 2\pi \int_0^2 y(8 - y^3 - 0)\,dy = 2\pi \int_0^2 (8y - y^4)\,dy$$
$$= 2\pi \left(4y^2 - \frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^2$$
$$= \frac{96\pi}{5}$$



Şekil 31.8: Dilimleme

1.13 Dilimleme Yöntemiyle Hacim Bulma

Şekilde hacmi hesaplanacak bir cisim görülüyor. Uygun bir Ox- ekseni seçelim. Eksenin hangi konumda seçildiği ancak pratik değer taşır. Cismin her noktasından D doğrusuna dikmeler inildiğini varsayalım. Dikmelerin ayaklarını içeren $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsünü (partition) P ile gösterelim:

$$a = x_0 < x_1 < -x_2 < \ldots < x_n = b \tag{31.47}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, M = max\{\Delta x_i| \quad i = 1,2,\ldots,n\} \tag{31.48}$$

olsun. x_i noktasından D doğrusuna dikey olacak biçimde çizilen düzlem S cismiyle kesişir ve onunla arakesiti düzlemsel bir R_i bölgesi oluşturur. R_i bölgesinin alanına $A(x_i)$ diyelim. Bölüntünün ardışık x_{-i-1}, x_i noktalarından deçen dikey düzlemlerin S ile arakesitleri arasında kalan dilimi düşünelim. Bu dilimin hacmı yaklaşık olarak, $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$ olmak üzere,

$$\Delta V(x_i) \approx A(x_i).\Delta x_i \tag{31.49}$$

olacaktır. Bu yaklaşık hacimlerin toplamı S cisminin V hacmine yakın olur:

$$V \approx \sum_{i=0}^{n} \Delta V(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \Delta A(x_i)\Delta x_i \tag{31.50}$$

Δx_i bölüntü aralıklarının M maksimum uzunluğu sifıra giderken (31.50) toplamının limiti varsa söza konusu limit

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \tag{31.51}$$

integraline eşit olur. Bu değer S cismini hacmidir.

Örnek 31.42. *$y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan Ox ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel hacmi bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{\frac{1}{4}}^{4} \left(x - \frac{1}{4}\right) dx \\
&= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\right]_{\frac{1}{4}}^{4} \\
&= \pi \left(\left[\frac{4^2}{2} - \frac{4}{4}\right] - \left[\frac{(frac14)^2}{2}\right]\right) \\
&= \frac{225\pi}{32} \\
&= 22.09 \text{birim küp}
\end{aligned}$$

bulunur.

31.14 Örnek Hacim Hesapları

1. Taban yarıçapı r ve yüksekliği h olan dik dairesel koninin hacmini bulunuz.

   Çözüm:

   Koniyi dönel bir cisim olarak düşünmek için, koninin simetri eksenini $Ox-$ eksenini ve koninin tepe nontasını O başlangıç noktası seçelim. Herhangi bir $x \in [0, h]$ noktasında $Ox-$ eksenine dik düzlemle koninin arakesiti bir çemberdir. Koninin $Oy-$ ekseni boyunca olan yan ayrıtını $y = f(x)$ ile gösterelim. Şekildeki OBX üçgeni OB'H üçgenine benzer olduğundan, yani

   $$OBX \sim OB'H$$

   benzerliğinden

   $$\frac{y}{r} = \frac{x}{h}$$

   yazılabilir. Buradan

   $$y = \frac{r}{h} x$$

   çıkar ve sözkonusu dilimin (arakesit) alanı

   $$A(x) = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \tag{31.52}$$

   olur. Buradan

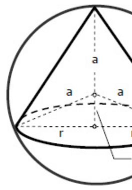
   $$V = \int_0^h A(x) dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h \tag{31.53}$$

   formülü çıkar.

2. Yarıçapı $a = 3$ birim olan bir küre içine sığabilecek en büyük hacimli dairesel koninin boyutları ne olmalıdır?

   Çözüm: Koninin tepesinden tabana indirilen dikmenin uzunluğuna h, koni tabanın yarıçapına $r = x$ diyelim. Küre merkezinden koni tabanının ortasına inilen dikmenin uzunluğu $y = h - 3$ olur. Koninin hacmi $V = \frac{1}{3}\pi x^2 (y + 3)$ ve dik üçgenden $y = \sqrt{3^2 - x^2}$ olur. Bunu hacim formülünde kullanırsak,

   $$\begin{aligned}
   V &= \frac{\pi}{3} x^2 (3 - x^2) \\
   V' &= \frac{2\pi x}{3} (3 - x^2) + \frac{\pi x^2}{3} \left(\frac{-x}{\sqrt{3 - x^2}}\right)
   \end{aligned}$$

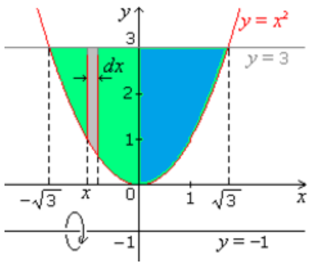


Şekil 31.9: Kür

çıkar. $V' = 0$ denkleminini çözersek

$$
\begin{aligned}
V' &= 2(3+\sqrt{3^2-x^2}) + x(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}) = 0 \\
&\Rightarrow 6 + 2\sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \\
&\Longrightarrow 2\sqrt{9-x^2} = x^2 - 6
\end{aligned}
$$

çıkar. Son denklemi çözmek için $x^2 = t$ konumu yapıp iki yanın karesi alınırsa, $x^2 = t = 0$ ve $x^2 = 8$ sisteminden $x_1 = 0$ ve $x_2 = 2\sqrt{2}$ elde edilir. x_2 için hacim maksimum olur. Bu durumda $y = \sqrt{9-8} = 1$ çıkar. Demek ki aradığımız koninin yüksekliği $h = 3+1 = 4$ v4 taban yarıçapı $r = x = 2\sqrt{2}$ dir.



Şekil 31.10: Dönel cisim

3. $y = x^2, \quad y = 3$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

Dilimleme yöntemini kullanalım. Yandaki şekle bakarak integral sınırlarının $y = x^2$ parabolü ile $y = 3$ doğrusunun kesişim noktaları olduğunu görürüz: $(\pm\sqrt{3}, 3)$. Sözkonusu alan $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ aralığı üzerindeki dönmektedir. Bu alan içinde genişliği dx olan küçük bir dikdörtgenin dönmesiyle oluşan silindirin hacmi

$$
dV = \pi)3 - (-1))^2 dx - \pi(x^2 - (-1))^2 dx = \pi(15 - 2x^2 - x^4)dx
$$

olacaktır. Buradan dV nin çift bir fonksiyon olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi(15 - 2x^2 - x^4)dx \\
&= 2\int_0^{\sqrt{3}} \pi(15 - 2x^2 - x^4)dx \\
&= 2\pi\left[15\pi x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= 2\pi\left(\left[15\sqrt{3} - \frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 - \frac{1}{5}(\sqrt{3})^5\right] - 0\right) \\
&= \frac{112\sqrt{3}\pi}{5} \\
&\approx 1221.88732
\end{aligned}
$$

olur.

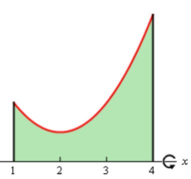
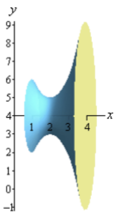
4. $[1, \infty]$ aralığı üzerinde $y = \frac{1}{x}$ eğrisi Ox ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^{\infty} \frac{\pi}{x^2}\,dx \\
&= \pi \lim_{t\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{\pi}{x^2}\,dx \\
&= \pi \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t \\
&= \pi \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{t}\right)\right] \\
&= \pi(-0+1) \\
&= 1\pi \text{ küp}
\end{aligned}
$$

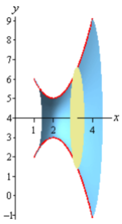
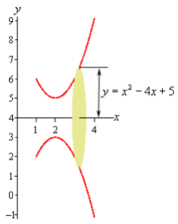
olur.

5. $[1,4]$ aralığı üzerinde $y = x^2 - 4x$ parabbolünün sınırladığı düzlemsel alan Ox ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Şekil 31.11: Dönen yüzey ve oluşan cisim

ölçekler

Çözüm: Silindi,rik kabuklar yöntemini kullanacağız.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^4 (x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25)\,dx \\
&= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{26}{3}x^2 - 40x + 25\right|_1^4 \\
&= \frac{78\pi}{5} \text{ küp}
\end{aligned}
$$

olur.

Index